ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍

Study of Derivative Theory of Functions

ភាគទី១

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ឆ្នាំ ២០២៣

ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍

Study of Derivative Theory of Functions

ភាគទី១

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្រ្តនិងបច្ចេកវិទ្យា

ឆ្នាំ ២០២៣

មាតិកា

ទំព័រ

អារម្ភកថា

ការរីកចម្រើននៃបច្ចេកវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ តម្រូវឱ្យមនុស្ស ខិតខំស្វែងរកនូវចំណេះដឹងថ្មីៗ ដើម្បីគ្រប់គ្រងនិងប្រើប្រាស់នូវ បច្ចេកវិទ្យាទាំងអស់នោះឱ្យបានប្រសើរឡើង។ ក្នុងនោះដែរ មុខ ជំនាញគណិតវិទ្យា ដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រ ហើយ វាជាចំណែកមួយដែលមិនអាចខ្វះបានក្នុងការចូលរួមអភិវឌ្ឍ ន៍បច្ចេកវិទ្យានិងភាពរីកចម្រើននៃប្រទេសជាតិ។ ដេរីវេ ជាផ្នែកមួយ នៃគណិតវិទ្យាគណនា ឬ គណិតវិទ្យាវិភាគ នៅក្នុងវិស័យគណិត វិទ្យា។ ដេរីវេ ត្រូវបានអនុវត្តក្នុងវិស័យផ្សេងៗដូចជា រូបវិទ្យា គីមី វិទ្យា វិស្វកម្ម សេដ្ឋកិច្ច ជីវវិទ្យា កីឡាជាដើម ដោយសារ ដេរីវេ ជា អត្រាប្រាកដ ដែលបរិមាណមួយប្រែប្រួលដោយធៀបនឹងបរិមាណ មួយទៀត ឬ ការរកល្បឿនដោយធៀបនឹងពេល (ជាឧទាហរណ៍ កីឡារត់ប្រណាំង កីឡាប្រណាំងទូក...)និងវាទាក់ទងនឹងចម្ងាយ។ ដោយកត្តានេះហើយ ទើបធ្វើឱ្យខ្ញុំសិក្សាស្រាវជ្រាវអំពីដេរីវេ ហើយ បាននិពន្ធសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍** (Study of Derivative Theory of Functions) (ភាគទី១) នេះឡើង ក្នុង

គោលបំណងចូលរួមចំណែកអភិវឌ្ឍន៍បំណិន និង ការពិចារណារបស់សិស្ស និង និស្សិតក៏ដូចជាមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដែរ។

សៀវភៅនេះរៀបចំឡើងដើម្បីបំពេញនូវបំណងរបស់សិស្ស និស្សិត អ្នកស្រាវជ្រាវ និង មិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដែលខ្វះឯកសារសិក្សានិងស្រាវជ្រាវ ជាពិសេសអ្នកដែលបានរៀនឯកទេសគណិតវិទ្យា ត្រូវតែសិក្សាពីទ្រឹស្តីដេរីវេនេះ ពីព្រោះវាជាមេរៀនមូលដ្ឋានដែលត្រូវតែមានក្នុង វិភាគចំនួនពិត ឬ គណិតវិទ្យាគណនា ឬក៏ គណិតវិទ្យាវិភាគ ។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ សិស្ស និស្សិត អ្នកស្រាវជ្រាវ និង មិត្តអ្នកអានទាំងអស់ ដែលគាំទ្រដល់ សៀវភៅស្តីអំពី **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍** នេះ ហើយសូមស្វាគមន៍ជានិច្ចរាល់ការរិះគន់ស្ថាបនា ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែសុក្រឹតថែមទៀត។

ភ្នំពេញ, ខែឧសភា ឆ្នាំ២០២៣

Vichea

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍

Study of Derivative Theory of Functions

នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពី សេចក្តីផ្តើម និង បញ្ញត្តិមូលដ្ឋាននៃដេរីវេដូចជា លីមីតនៃអនុគមន៍ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ និង រូបមន្តដេរីវេ។ ជាដំបូង យើងនឹងពិពណ៌នានូវប្រវត្តិដេរីវេខ្លះៗ ក្នុងសេចក្តីផ្តើមដូចខាងក្រោម។

សេចក្តីផ្តើម

នៅក្នុងគណិតវិទ្យា ដេរីវេ ជាអត្រាប្រាកដ ដែលបរិមាណមួយប្រែប្រួលដោយធៀបទៅនឹងបរិមាណមួយទៀត។ និមិត្តសញ្ញាក្រិកដេលតា (delta Δ) ជាធម្មតាត្រូវបានប្រើ ដើម្បីតំណាងឱ្យបម្រែបម្រួលនៅពេលប្រើដេរីវេ។ តាមធរណីមាត្រ ដេរីវេ ជាមេគុណប្រាប់ទិស(slope)នៃខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុចមួយនៅលើខ្សែកោងដែលកំណត់ថា ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងនៅត្រង់ចំណុចដូចគ្នា។ ដំណើរការនៃការស្វែងរកដេរីវេត្រូវបានគេហៅថា ការគណនាដេរីវេ (differentiation)។ ដំណើរការនេះ ជាផ្នែកកណ្តាលនៃមែកធាងគណិតវិទ្យា ដែលហៅថា ការគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល (differential calculus) ។ វាក៏ជាគោលគំនិតសំខាន់

មួយក្នុងចំណោមគោលគំនិតសំខាន់ពីរនៃគណិតវិទ្យាគណនា (calculus) មួយទៀតគឺអាំងតេក្រាល។ ការគណនាអាំងតេក្រាល (integral calculus or integration) និង ការគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺផ្អែកលើទ្រឹស្តីបទជាមូលដ្ឋាននៃគណិតវិទ្យាគណនា។

ដេរីវេ ជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាគណនា ឬ គណិតវិទ្យាវិភាគ (mathematical analysis) នៅក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យា។ គណិតវិទ្យាគណនា ត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយរូបវិទូ និង គណិតវិទូអង់គ្លេស គឺលោក ញូតុន (Sir Isaac Newton 1642–1727) និង គណិតវិទូអាល្លឺម៉ង់ គឺលោក លែបនីស (Gottfried Wilhelm Leibniz 1646–1716)នៅប្រហែលពាក់កណ្តាលនៃសតវត្សទី17 ។ ញូតុន បានរកឃើញថា គណិតវិទ្យានៃពេលវេលារបស់គាត់មិនគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាដែលគាត់ចាប់អារម្មណ៍នោះទេ ដូច្នេះ គាត់បានបង្កើតគណិតវិទ្យាថ្មី។ ក្នុងពេលជាមួយគ្នានោះ គណិតវិទូម្នាក់ទៀតឈ្មោះ លែបនីស បានបង្កើតគំនិតដូចគ្នានឹងញូតុនដែរ។ ញូតុនចាប់អារម្មណ៍ក្នុងការគណនាល្បឿននៃវត្ថុមួយនៅខណៈណាមួយ។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើមនុស្សម្នាក់អង្គុយនៅក្រោមដើមប៉ោម ដូចដែលមានរឿងព្រេងនិទានដែលញូតុនបានធ្វើ ហើយផ្លែប៉ោមមួយធ្លាក់ចំក្បាលមនុស្សនោះ អ្នកនោះអាចនឹងសួរថា តើផ្លែប៉ោមធ្វើដំណើរលឿនប៉ុណ្ណា មុននឹងប៉ះក្បាលគាត់។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ស្នាដៃរបស់ញូតុននឹងមិនអាចធ្វើទៅរួចទេ ប្រសិនបើ

គ្មានការខិតខំប្រឹងប្រែងរបស់ Isaac Barrow (1630–1677) ដែលបានចាប់ផ្ដើមការអភិវឌ្ឍដំបូងនៃដេរីវេក្នុងសតវត្សទី 16 ។ សំខាន់ជាងនេះទៅទៀត អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រជាច្រើននាពេលបច្ចុប្បន្ននេះ ចាប់អារម្មណ៍ក្នុងការគណនាអត្រាប្រែប្រួលទីតាំងរបស់ផ្កាយរណប ដោយធៀបនឹងពេលវេលា (ល្បឿនរបស់វា)។ វិនិយោគិនភាគច្រើនចាប់អារម្មណ៍លើរបៀប ដែលតម្លៃភាគហ៊ុនប្រែប្រួលតាមពេលវេលា (អត្រាកំណើនរបស់វា)។ តាមពិត បញ្ហាសំខាន់ៗជាច្រើននាពេលបច្ចុប្បន្ននេះនៅក្នុងវិស័យរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា វិស្វកម្ម សេដ្ឋកិច្ច ជីវវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងទៀតពាក់ព័ន្ធនឹងការស្វែងរកអត្រា ដែលបរិមាណមួយប្រែប្រួលដោយធៀបនឹងបរិមាណមួយទៀត ពោលគឺពួកវាពាក់ព័ន្ធនឹងការស្វែងរកដេរីវេ។ [១]

Isaac Barrow
1630 –1677

[១] https://www.encyclopedia.com/science-and-technology/mathematics/mathematics/derivative

Sir Isaac Newton
1642 - 1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646 – 1716

មុននឹងសិក្សាដេរីវេនៃអនុគមន៍ យើងចង់ឱ្យលោកអ្នកស្គាល់នូវនិយមន័យនៃលីមីតនៃអនុគមន៍សិន ។ ក្នុងគណិតវិទ្យា លីមីតនៃអនុគមន៍ ជាគោលគំនិតមូលដ្ឋានក្នុងគណិតវិទ្យាគណនា និងការវិភាគទាក់ទងនឹងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍នោះនៅជិតជាតុចូលជាក់លាក់មួយ។ និយមន័យផ្លូវការនៃលីមីត ដែលបង្កើតឡើងដំបូងនៅដើមសតវត្សទី 19 ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យដូចតទៅ។

១. និយមន័យនៃលីមីត

និយមន័យទី១ (និយមន័យផ្លូវការ) [២]

គេឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \neq a$ លើចន្លោះបើកដែលផ្ទុក a ។ តាង b ជាចំនួនពិត ។ នោះគេបាន $\lim_{x \to a} f(x) = b$ លុះត្រាតែ ចំពោះ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ដែលបើ $0 < |x-a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-b| < \varepsilon$ ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

តាង $\varepsilon > 0$ ។ យើងត្រូវការ $|(2x+3)-5| < \varepsilon$ សមមូល

$|2x-2| < \varepsilon$ សមមូល $2|x-1| < \varepsilon$ ។

យើងជ្រើសរើស $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ និង សន្មត $0 < |x-1| < \delta$ នាំឱ្យ

$$|(2x+3)-5| = 2|x-1| < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$ ។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យ យើងបាន $\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$ ។

---

[២] https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_1200%3A_Calculus_for_Scientists_I/1%3A_Limit__and_Continuity_of_Functions/1.5%3A_Formal_Definition_of_a_Limit_(optional)

និយមន័យទី២

បើ x ខិតជិត a ហើយអនុគមន៍ $y = f(x)$ ខិតជិតតម្លៃ b ណាមួយ នោះគេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ។

ឧទាហរណ៍ យើងគណនាលីមីត៖

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 5) = 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 8}{4x - 3} = \frac{3 \cdot 2^2 + 8}{4 \cdot 2 - 3} = \frac{20}{5} = 4$$

និង

$$\lim_{x \to 0} (7x^5 + 3\sin x - 2\cos x) = 7(0)^5 + 3\sin 0 - 2\cos 0$$

$$= 0 + 3(0) - 2(1) = -2 \text{ ។}$$

២. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ និង $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$ ហើយ b_1, b_2 ជាចំនួនពិត និង a អាចជាចំនួនកំណត់ឬអនន្ត នោះគេបាន៖

ក. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2$ ។

ខ. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = b_1 - b_2$ ។

គ. $\lim_{x \to a} k f(x) = k b_1$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

ឃ. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = b_1 \cdot b_2$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b_1}{b_2}$ ដែល $b_2\neq 0$, $g(x)\neq 0$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=b_1^{\,n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

សម្គាល់

១. បើ $f(x)=c$ ជាអនុគមន៍ថេរ នោះគេបាន

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}c=c$$ ។

២. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ។

ឧទាហរណ៍ យើងគណនាលីមីតមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to -1}(3x^3-7x+13)=\lim\limits_{x\to -1}3x^3-\lim\limits_{x\to -1}7x+\lim\limits_{x\to -1}13$

$$=3(-1)^3-7(-1)+13=17$$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-6x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-6x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-6x}{(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(-6x)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}$$

$$=\frac{-6(1)}{1+1}=-3$$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^2-3)^{2024}=\left(\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^2-3)\right)^{2024}$

$$=(+\infty)^{2024}=+\infty$$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 2}\dfrac{(8x+x^3)(-2x^2+7x-6)}{(4x^2-9x+2)}$

$$=\lim_{x\to 2}(8x+x^3)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+7x-6}{4x^2-9x+2}$$

$$=(8(2)+2^3)\lim_{x\to 2}\frac{(-2x^2+4x)+(3x-6)}{(4x^2-x)+(-8x+2)}$$

$$=24\lim_{x\to 2}\frac{-2x(x-2)+3(x-2)}{x(4x-1)-2(4x-1)}$$

$$=24\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3-2x)}{(x-2)(4x-1)}$$

$$=24\lim_{x\to 2}\frac{(3-2x)}{(4x-1)}$$

$$=24\cdot\frac{(3-2(2))}{(4(2)-1)}=-\frac{24}{7}$$ ។

ង. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(2x^2-5x)(e^{3x}-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}(2x-5)$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}(2x-5)$$

$$=3\cdot 1\cdot(2\cdot 0-5)=-15$$ ។

៣. និយមន័យនៃដេរីវេ

និយមន័យទី៣ [៣]

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មួយកំណត់លើចន្លោះបើក I ដែលផ្ទុក a (ឬ វ៉ស៊ីណាសនៃ a) ។ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ $x = a$ កំណត់សរសេរ $f'(a)$ និង កំណត់ដោយ៖

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (បើមាន)}$$

ដែល $\Delta x = h = x - a$ ឬ $x = a + \Delta x = a + h$ ។ គេថា អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេនៅត្រង់ $x = a$ ។

ឧទាហរណ៍ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = 4x^2$ នៅត្រង់ $x = 2$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

រកដេរីវេនៃ $f(x)$ នៅត្រង់ $x = 2$ គឺរក $f'(2)$ ។

យើងមាន $y = f(x) = 4x^2$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

---

[៣] https://math24.net/definition-derivative.html#example1

យើងបាន $f(2)=4(2)^2=16$ និង

$$f(2+h)=4(2+h)^2=4(4+4h+h^2)$$

$$=16+16h+4h^2 \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{(16+16h+4h^2)-16}{h}$

$$=\frac{16h+4h^2}{h}=16+4h \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(16+4h)=16+4(0)=16 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $f'(2)=16$ ។

ឧទាហរណ៍ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $g(x)=2x^3-3x+6$ នៅត្រង់ $x=1$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

រកដេរីវេនៃ $g(x)$ នៅត្រង់ $x=1$ គឺរក $g'(1)$ ។

យើងមាន $g(x)=2x^3-3x+6$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

យើងបាន $g(1)=2(1)^3-3(1)+6=5$ និង

$$g(1+h)=2(1+h)^3-3(1+h)+6$$

$$= 2(1 + 3h + 3h^2 + h^3) - 3 - 3h + 6$$

$$= 5 + 3h + 6h^2 + 2h^3 \text{ ។}$$

នាំឱ្យ

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{(5 + 3h + 6h^2 + 2h^3) - 5}{h}$$

$$= \frac{3h + 6h^2 + 2h^3}{h}$$

$$= 3 + 6h + 2h^2 \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$g'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3 + 6h + 2h^2)$$

$$= 3 + 6(0) + 2(0)^2 = 3 \text{ ។}$$

និយមន័យទី៤ [៤]

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មួយកំណត់លើចន្លោះបើក I ដែលផ្ទុក a (ឬ វ៉ឺស៊ីណាសនៃ a)។ គេហៅថា អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ $x = a$ កាលណា មាន $b \in \mathbb{R}$ ដែលគ្រប់ x ក្បែរ a គេបាន៖

[៤] សួន សូវ៉ាន់ << *វិភាគចំនួនពិត ភាគ១* >> សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧ ។

$$f(x) = f(a) + (x-a)(b + \varepsilon(x)) \, , \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

ដែល $b = f'(a)$ ។

បើតាង $h = x - a$ នោះសមីការទៅជា

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \, , \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$ ។

អនុគមន៍ $df_a(h) = f'(a)\,h$ ហៅថា ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ f ត្រង់ a ។

ទ្រឹស្តីបទទី១

អនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a លុះត្រាតែ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ a ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

យើងបានអនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = f(a) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon(x)), \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x), \, x \neq a, \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} [\, f'(a) + \varepsilon(x)]$$

$$= f'(a) + 0 = f'(a)$$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ a ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a លុះត្រាតែ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ a ។

ឧទាហរណ៍

អនុគមន៍ $y = f(x) = 2x$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល ឬ មានដេរីវេ នៅត្រង់ $\forall a \in \mathbb{R}$ ពីព្រោះ

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2x - 2a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2(x - a)}{x - a} = 2$$ ។

ឧទាហរណ៍

អនុគមន៍ $y = g(x) = x^2$ មានដេរីវេ ឬ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅត្រង់ $\forall a \in \mathbb{R}$ ពីព្រោះ

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២

បើអនុគមន៍ f មានដេរីវេ ឬ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ a ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

របៀបទី១៖ ដោយអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=a$

យើងបាន $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ មាន ។

យើងមាន $f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$ ចំពោះ $x\neq a$ ។

តាមលក្ខណៈមូលដ្ឋាននៃលីមីត នាំឱ្យ

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[(f(x)-f(a))+f(a)]$$

$$=\lim_{x\to a}[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)]$$

$$=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

របៀបទី២៖ ដោយអនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x=a$ យើងបាន

$$f(x)=f(a)+(x-a)(f'(a)+\varepsilon(x)),\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$ ។

នាំឱ្យ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[f(a)+(x-a)(f'(a)+\varepsilon(x))]$

$$=f(a)+0\cdot(f'(a)+0)=f(a)$$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

និយមន័យទី៥

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ (ធៀបនឹង x) កំណត់សរសេរ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយៈ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ។[៥]

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេឬមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x = a$ កាលណា $f'(a)$ មាន ហើយ $f(x)$ មានដេរីវេឬមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះមួយ កាលណា ដេរីវេនេះមានចំពោះគ្រប់ចំណុចក្នុងចន្លោះនោះ។

សម្គាល់

១. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់ឡាហ្គ្រង់ (Lagrange) ចំពោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $f'(x)$ ឬ $y'(x)$ ។

២. ការកំណត់សរសេរនិមិត្តសញ្ញារបស់លៃបនីត (Leibniz) ចំពោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $\frac{df}{dx}$ ឬ $\frac{dy}{dx}$ ។

៣. គេក៏អាចប្រើនិមិត្តសញ្ញាផ្សេងទៀតដែរ ចំពោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $\frac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$ ឬ Dy ដែល $\frac{d}{dx}$ ឬ D ជាការីដេរីវេ ឬ ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

---

[៥] https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/DerivativeProofs.aspx#Extras_DerPf_DefCont

ឧទាហរណ៍

ក. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=4x^3-5x+6$ ។

ខ. រក $f'(0)$ និង $f'(-2)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រកដេរីវេនៃ $f(x)$ ។

យើងមាន $f(x)=4x^3-5x+6$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

យើងបាន $f(x+h)=4(x+h)^3-5(x+h)+6$

$= 4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-5x-5h+6$

$=4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3-5x-5h+6$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\frac{(4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3-5x-5h+6)-(4x^3-5x+6)}{h}$$

$$=\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3-5h}{h}$$

$=12x^2+12xh+4h^2-5$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12x^2 + 12xh + 4h^2 - 5)$$

$$= 12x^2 + 12x(0) + 4(0)^2 - 5 = 12x^2 - 5 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $f'(x) = 12x^2 - 5$ ។

ខ. រក $f'(0)$ និង $f'(-2)$ ។

តាមសំណួរ ក. យើងមាន $f'(x) = 12x^2 - 5$ ។

នាំឱ្យ $f'(0) = 12(0)^2 - 5 = -5$

និង $f'(-2) = 12(-2)^2 - 5 = 43$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $g(x) = 2x^3 + 3x^4 + 12$ តាមនិយមន័យ។

ខ. ទាញរកដេរីវេនៃ g ត្រង់ $x = 1$ និង $x = -2$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រក $g'(x)$ តាមនិយមន័យ។

យើងមាន $g(x) = 2x^3 + 3x^4 + 12$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

យើងបាន $g(x+h) = 2(x+h)^3 + 3(x+h)^4 + 12$

$$= 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 3(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4) + 12$$

$$= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 + 3x^4 + 12x^3h + 18x^2h^2 + 12xh^3 + 3h^4 + 12 \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\dfrac{(2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3+3x^4+12x^3h+18x^2h^2+12xh^3+3h^4+12)-(2x^3+3x^4+12)}{h}$

$=\dfrac{6x^2h+6xh^2+2h^3+12x^3h+18x^2h^2+12xh^3+3h^4}{h}$

$=6x^2+6xh+2h^2+12x^3+18x^2h+12xh^2+3h^3$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2+12x^3+18x^2h+12xh^2+3h^3)$

$=6x^2+6x(0)+2(0)^2+12x^3+18x^2(0)+12x(0)^2+3(0)^3$

$=6x^2+12x^3$ ។

ដូចនេះ $g'(x)=6x^2+12x^3$ ។

ខ. រក $g'(1)$ និង $g'(-2)$ ។

តាមសំណួរ ក. យើងមាន $g'(x)=6x^2+12x^3$ ។

នាំឱ្យ $g'(1)=6(1)^2+12(1)^3=18$

និង $g'(-2)=6(-2)^2+12(-2)^3=-72$ ។

និយមន័យទី៦ [៦]

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់លើចន្លោះបើក I ដែលផ្ទុក a ។

ក. ដេរីវេឆ្វេងនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ $x = a$ កំណត់សរសេរ $f'(a^-)$ ឬ $f_-^{'}(a)$ និង កំណត់ដោយៈ

$$f'(a^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ដែល $\Delta x = h = x - a$ ឬ $x = a + \Delta x = a + h$ ។

ខ. ដេរីវេស្តាំនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ $x = a$ កំណត់សរសេរ $f'(a^+)$ ឬ $f_+^{'}(a)$ និង កំណត់ដោយៈ

$$f'(a^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

៦ https://www.brainkart.com/article/One-sided-derivatives-(left-hand-and-right-hand-derivatives)---The-concept-of-derivative_36105/

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ដែល $\Delta x = h = x - a$ ឬ $x = a + \Delta x = a + h$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៣

អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x = a$ លុះត្រាតែ f មាន ដេរីវេឆ្វេងស្មើដេរីវេស្តាំត្រង់ $x = a$ ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

ដោយអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x = a$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ មាន

$\Leftrightarrow$ $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ មាន និង

$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ មាន ហើយ

$f'(a^-) = f'(a^+)$ $\Leftrightarrow$ $f'(a^-) = f'(a^+)$

មានន័យថា f មានដេរីវេឆ្វេងស្មើដេរីវេស្តាំត្រង់ $x = a$ ។

ឧទាហរណ៍

រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} -x\,, & x < 0 \\ x^2\,, & x \geq 0 \end{cases}$

នៅត្រង់ $x = 0$ ។ រួចសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នេះ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រកដេរីវេនៃ $f'(x)$ ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(x)=\begin{cases} -x\,, & x<0 \\ x^2\,, & x\geq 0 \end{cases}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

និង

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}h=0 \text{ ។}$$

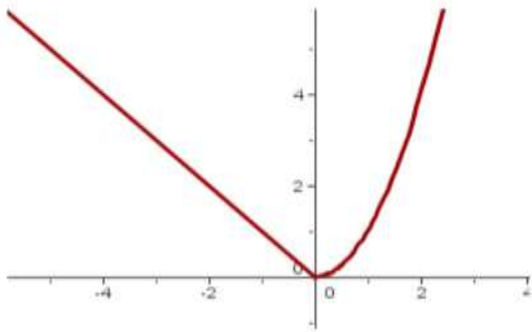
ដោយ $f'(0^-)\neq f'(0^+)$

ដូចនេះ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ។

ខ. សង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

តារាងលេខជំនួយ

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	0	1	4	9



រូបទី១៖ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = |x|$ និង សង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នេះផង។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

យើងមាន $f(x) = |x|$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមនិយមន័យនៃដេរីវេ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \cdot \frac{|x+h| + |x|}{|x+h| + |x|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|^2 - |x|^2}{h(|x+h| + |x|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h(|x+h|+|x|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2) - x^2}{h(|x+h|+|x|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h(|x+h|+|x|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{|x+h|+|x|}$$

$= \dfrac{2x+0}{|x+0|+|x|} = \dfrac{2x}{2|x|} = \dfrac{|x|}{x}$ ចំពោះ

$x \neq 0$ តែបើ $x = 0$ នាំឱ្យ

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

និង

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$ ។

ដោយ $f'(0^-) \neq f'(0^+)$

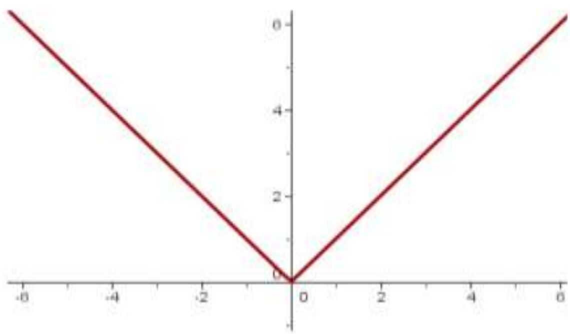
នាំឱ្យ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ទេ ។

ដូចនេះ $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$ ចំពោះ $x \neq 0$ តែ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ទេ ។

ខ. សង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ។

តារាងលេខជំនួយ

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4



រូបទី២៖ ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x) = |x|$

និយមន័យទី៧ [៧]

អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេលើចន្លោះបិទ $[c, d]$ កាលណា វាមានដេរីវេលើចន្លោះបើក (c, d) ហើយនៅត្រង់ចំណុចចុង c និង d ៖

[៧] https://www.brainkart.com/article/The-concept-of-derivative_36101/

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

និង $f'(d) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(d+\Delta x) - f(d)}{\Delta x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(d-h) - f(d)}{h}$$

ដែល $h = \Delta x > 0$ ។

៤. រូបមន្តដេរីវេ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់នូវរូបមន្តគ្រឹះ និង រូបមន្តងាយនៃដេរីវេមួយចំនួនដូចតទៅ៖

៤.១ រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ។

- ចំពោះផលបូកនៃអនុគមន៍៖ $y = f(x) + g(x)$

យើងតាង $y = F(x)$ ។

យើងបាន $F(x) = f(x) + g(x)$ និង

$$F(x+h) - F(x)$$
$$= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))$$
$$= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$y' = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$= f'(x) + g'(x)$ ពីព្រោះអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ ។

ដូចនេះ បើ $y = f(x) + g(x)$ នោះ $y' = f'(x) + g'(x)$ ។

- ចំពោះផលដកនៃអនុគមន៍៖ $y = f(x) - g(x)$

យើងតាង $y = F(x)$ ។

យើងបាន $F(x) = f(x) - g(x)$ និង

$$F(x+h) - F(x)$$
$$= (f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))$$
$$= (f(x+h) - f(x)) - (g(x+h) - g(x))$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$y' = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$= f'(x) - g'(x)$ ពីព្រោះអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ ។

ដូចនេះ បើ $y = f(x) - g(x)$ នោះ $y' = f'(x) - g'(x)$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍ផលគុណចំនួនថេរនឹងអនុគមន៍៖

$$y = \alpha f(x)$$

យើងតាង $y = F(x)$ ។
យើងបាន $F(x) = \alpha f(x)$ និង

$$F(x+h) - F(x) = \alpha f(x+h) - \alpha f(x)$$
$$= \alpha(f(x+h) - f(x))$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$y' = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f'(x)$$ ពីព្រោះ

អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេ ។

ដូចនេះ បើ $y = \alpha f(x)$ នោះ $y' = \alpha f'(x)$ ។

- ចំពោះផលគុណនៃអនុគមន៍៖ $y = f(x) \cdot g(x)$

យើងតាង $y = F(x)$ ។

យើងបាន $y = f(x) \cdot g(x)$ និង

$$F(x+h) - F(x)$$

$$= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$$

$$= f(x+h) \cdot g(x+h) - g(x+h) \cdot f(x) + g(x+h) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$= [f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$y' = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

ពីព្រោះអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ។

ដូចនេះ បើ $y = f(x) \cdot g(x)$ នោះ

$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ។[៨]

- ចំពោះផលចែកនៃអនុគមន៍៖ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

យើងតាង $y = F(x)$ ។

យើងបាន $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ និង

$$F(x+h) - F(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x) \cdot g(x+h)}$$

[៨] http://www.sosmath.com/tables/derivative/derivative.html

$$= \frac{[f(x+h) - f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot[g(x+h) - g(x)]}{g(x)\cdot g(x+h)}$$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$y' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}]\cdot g(x) - f(x)\cdot[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}]}{g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}]\cdot g(x) - \lim\limits_{h\to 0} f(x)\cdot[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}]}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ពីព្រោះអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ $g(x) \neq 0$ ។

ដូចនេះ បើ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ នោះ

$$y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$ ដែល $g(x) \neq 0$ ។

៤.២ រូបមន្តខាយនៃដេរីវេ

- ចំពោះអនុគមន៍ថេរ៖ $f(x)=k$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ បើ $f(x)=k$ នោះ $f'(x)=0$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍ស្វ័យគុណ៖ $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Q}$

ដើម្បីរកដេរីវេនៃអនុគមន៍នេះ យើងបានសិក្សាតាមករណីជាច្រើនដូចតទៅ៖

- ករណី $n=0$ នោះ $f(x)=x^0=1$ ។

វាជាអនុគមន៍ថេរ នាំឱ្យ $f'(x)=0$ ។

- ករណី $n\in\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$ នោះ $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)-x][(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ តួ}} = n\,x^{n-1} \text{ ។}$$

- ករណី $n \in \mathbb{Z}^-$ នោះយើងតាង $n = -k,\ k \in \mathbb{N}$ និង

$$f(x) = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}\ ,\ x \neq 0 \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^k} - \dfrac{1}{x^k}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^k - (x+h)^k}{h\,x^k (x+h)^k}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^k (x+h)^k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h}$$

$$= \frac{-1}{x^k x^k} \cdot k\,x^{k-1} = (-k)\,x^{-k-1} = n\,x^{n-1} \text{ ។}$$

នាំឱ្យយើងបាន

បើ $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z}$ នោះ $f\,'(x) = n\,x^{n-1},\ x \neq 0$ ។

ឥឡូវនេះ យើងធ្វើបន្តចំពោះករណី $n = \dfrac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}$ នោះ

$$f(x) = x^n = x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}\ ,\ p \in \mathbb{N} \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ -\ f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[p]{x+h}\ -\ \sqrt[p]{x}}{h}\ ។$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមានសមភាព

$$a^k - b^k = (a-b)(\mathrm{a}^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

នាំឱ្យ $a - b = \dfrac{a^k - b^k}{\mathrm{a}^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}}$ ។

ដោយយក $a = \sqrt[p]{x+h},\ b = \sqrt[p]{x}$ និង $k = p$ នោះយើងបាន៖

$$\sqrt[p]{x+h} - \sqrt[p]{x}$$

$$= \frac{(\sqrt[p]{x+h})^p - (\sqrt[p]{x})^p}{(\sqrt[p]{x+h})^{p-1} + (\sqrt[p]{x+h})^{p-2}\sqrt[p]{x} + ... + \sqrt[p]{x+h}(\sqrt[p]{x})^{p-2} + (\sqrt[p]{x})^{p-1}}$$

$$= \frac{h}{(\sqrt[p]{x+h})^{p-1} + (\sqrt[p]{x+h})^{p-2}\sqrt[p]{x} + ... + \sqrt[p]{x+h}(\sqrt[p]{x})^{p-2} + (\sqrt[p]{x})^{p-1}}$$

និង

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[p]{x+h}\ -\ \sqrt[p]{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h[(\sqrt[p]{x+h})^{p-1} + (\sqrt[p]{x+h})^{p-2}\sqrt[p]{x} + ... + \sqrt[p]{x+h}(\sqrt[p]{x})^{p-2} + (\sqrt[p]{x})^{p-1}]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[p]{x+h})^{p-1} + (\sqrt[p]{x+h})^{p-2}\sqrt[p]{x} + ... + \sqrt[p]{x+h}(\sqrt[p]{x})^{p-2} + (\sqrt[p]{x})^{p-1}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt[p]{x})^{p-1}+(\sqrt[p]{x})^{p-2}\sqrt[p]{x}+\ldots+\sqrt[p]{x}(\sqrt[p]{x})^{p-2}+(\sqrt[p]{x})^{p-1}}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{(\sqrt[p]{x})^{p-1}+(\sqrt[p]{x})^{p-1}+\ldots+(\sqrt[p]{x})^{p-1}+(\sqrt[p]{x})^{p-1}}_{p\ \text{តួ}}}$$

$$=\frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}}=\frac{1}{p\,x^{1-\frac{1}{p}}}=n\,x^{n-1}$$ ។

ចំពោះករណី $n\in\mathbb{Q}$ មានន័យថា $n=\dfrac{q}{p}$, $q\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{N}$

នោះ $f(x)=x^{n}=x^{\frac{q}{p}}=(\sqrt[p]{x})^{q}$ ។

- បើ $q=0$ នោះ $n=0$ (មានរួចហើយ)។

- បើ $q\in\mathbb{Z}^{+}=\mathbb{N}$ និង តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[p]{x+h})^{q}-(\sqrt[p]{x})^{q}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[\sqrt[p]{x+h}-\sqrt[p]{x}][(\sqrt[p]{x+h})^{q-1}+(\sqrt[p]{x+h})^{q-2}\sqrt[p]{x}+\ldots+(\sqrt[p]{x+h})(\sqrt[p]{x})^{q-2}+(\sqrt[p]{x})^{q-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[p]{x+h}-\sqrt[p]{x}}{h}\times$$

$$\lim_{h\to 0}[(\sqrt[p]{x+h})^{q-1}+(\sqrt[p]{x+h})^{q-2}\sqrt[p]{x}+\ldots+(\sqrt[p]{x+h})(\sqrt[p]{x})^{q-2}+(\sqrt[p]{x})^{q-1}]$$

$$= \frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}} \cdot [(\sqrt[p]{x})^{q-1} + (\sqrt[p]{x})^{q-2}\sqrt[p]{x} + \ldots + (\sqrt[p]{x})(\sqrt[p]{x})^{q-2} + (\sqrt[p]{x})^{q-1}]$$

$$= \frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}} \cdot [\underbrace{(\sqrt[p]{x})^{q-1} + (\sqrt[p]{x})^{q-1} + \ldots + (\sqrt[p]{x})^{q-1} + (\sqrt[p]{x})^{q-1}}_{q\ \text{តួ}}]$$

$$= \frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}} \cdot q(\sqrt[p]{x})^{q-1} = \frac{q}{p}(\sqrt[p]{x})^{q-p}$$

$$= \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} = n x^{n-1} \text{ ។}$$

- បើ $q \in \mathbb{Z}^{-}$ និង តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt[p]{x+h})^{q} - (\sqrt[p]{x})^{q}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(\sqrt[p]{x+h})^{-q}} - \frac{1}{(\sqrt[p]{x})^{-q}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt[p]{x})^{-q} - (\sqrt[p]{x+h})^{-q}}{h(\sqrt[p]{x})^{-q}(\sqrt[p]{x+h})^{-q}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(\sqrt[p]{x})^{-q}(\sqrt[p]{x+h})^{-q}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt[p]{x+h})^{-q} - (\sqrt[p]{x})^{-q}}{h}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt[p]{x})^{-q}(\sqrt[p]{x+0})^{-q}} \cdot \frac{-q}{p} x^{\frac{-q}{p}-1} \text{ (តាមចម្លើយមុន)}$$

$$= \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} = n x^{n-1} \text{ ។}$$

ដូចនេះ បើ $f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{Q}$ នោះ $f'(x) = n x^{n-1}, \ x \neq 0$ ។

សម្គាល់

ក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន) របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជននិងកីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០០៩) អ្នកនិពន្ធបានស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះត្រឹម $n \in \mathbb{N}$ តែយើងខ្ញុំវិញបានស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះរហូតដល់ $n \in \mathbb{Q}$ ។

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = -\frac{2022}{2021}$ ខ. $y = x^{2022}$

គ. $y = -\frac{8}{3} x^{21}$ ឃ. $y = \frac{4}{3x^{12}}$

ង. $y = 5\sqrt[7]{x}$ ច. $y = 6\sqrt[5]{x^9}$

ឆ. $y = 20 - 5x^6 + \frac{10}{x^2} - 3\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[9]{x^7}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ការគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍តាមរូបមន្តងាយនៃដេរីវេ។

ក. បើ $y = -\frac{2022}{2021}$ នោះ $y' = 0$ ។

ខ. បើ $y = x^{2022}$ នោះ

$y' = 2022x^{2022-1} = 2022x^{2021}$ ។

គ. បើ $y = -\frac{8}{3}x^{21}$ នោះ

$y' = -\frac{8}{3}(21)x^{21-1} = -56x^{20}$ ។

ឃ. បើ $y = \frac{4}{3x^{12}} = \frac{4}{3}x^{-12}$ នោះ

$y' = \frac{4}{3}(-12)x^{-12-1} = -16x^{-13}$ ។

ង. បើ $y = 5\sqrt[7]{x} = 5x^{\frac{1}{7}}$ នោះ

$y' = 5(\frac{1}{7})x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{5}{7}x^{-\frac{6}{7}}$ ។

ច. បើ $y = 6\sqrt[5]{x^9} = 6x^{\frac{9}{5}}$ នោះ

$y' = 6(\frac{9}{5})x^{\frac{9}{5}-1} = \frac{54}{5}x^{\frac{4}{5}}$

ឆ. យើងមាន $y = 20 - 5x^6 + \frac{10}{x^2} - 3\sqrt[5]{x} + 4\sqrt[9]{x^7}$

$= 20 - 5x^6 + 10x^{-2} - 3x^{\frac{1}{5}} + 4x^{\frac{7}{9}}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = (20)' - (5x^6)' + (10x^{-2})' - (3x^{\frac{1}{5}})' + (4x^{\frac{7}{9}})'$$

$$= 0 - 5(6)x^{6-1} + 10(-2)x^{-2-1} - 3(\frac{1}{5})x^{\frac{1}{5}-1} + 4(\frac{7}{9})x^{\frac{7}{9}-1}$$

$$= -30x^5 - 20x^{-3} - \frac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{28}{9}x^{-\frac{2}{9}}$$ ។

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = -2x^2 + 3x + 5$ ហើយទាញរក $y'(0)$ និង $y'(2)$ ។

ខ. $y = 3x^3 + 4x^2 - 12$ ហើយទាញរកដេរីវេត្រង់ $x = 1$ និង $x = -2$ ។

គ. $g(x) = -23x^{2022} + 45x^{2021} - 5x^{2020} + 7x - 30$ ហើយទាញរក $g'(0)$ និង $g'(-1)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

ក. $y' = (-2x^2)' + (3x)' + (5)'$

$$= -4x + 3 + 0 = -4x + 3$$

ហើយទាញបាន

$$y'(0) = -4(0) + 3 = 3$$

និង $y'(2) = -4(2) + 3 = -5$ ។

ខ. $y' = (3x^3)' + (4x^2)' - (12)$

$$= 9x^2 + 8x - 0 = 9x^2 + 8x$$

ហើយទាញបាន

$$y'(1) = 9(1)^2 + 8(1) = 17$$

និង $y'(-2) = 9(-2)^2 + 8(-2) = 20$ ។

គ. $g'(x) = (-23x^{2022})' + (45x^{2021})' - (5x^{2020})' + (7x)' - (30)'$

$$= (-23)(2022)x^{2021} + 45(2021)x^{2020} - 5(2020)x^{2019} + 7 - 0$$

$$= -46506x^{2021} + 90945x^{2020} - 10100x^{2019} + 7$$

ហើយទាញបាន

$$g'(0) = -46506(0)^{2021} + 90945(0)^{2020} - 10100(0)^{2019} + 7 = 7$$

និង

$$g'(-1) = -46506(-1)^{2021} + 90945(-1)^{2020} - 10100(-1)^{2019} + 7$$

$$= 46506 - 90945 + 10100 + 7 = -34332$$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(1)$ នៃអនុគមន៍

$$g(x) = 7x^2(5x - 3)$$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $h'(x)$ និង $h'(2)$ នៃអនុគមន៍

$$h(x) = (-3x^2 + 3x)(5x^3 - 2x^2) - 50$$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(1)$ ។

យើងមាន $g(x) = 7x^2(5x-3)$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$\begin{aligned} g'(x) &= (7x^2)' \cdot (5x-3) + (7x^2) \cdot (5x-3)' \\ &= (14x) \cdot (5x-3) + (7x^2) \cdot (5) \\ &= 70x^2 - 42x + 35x^2 \\ &= 105x^2 - 42x \end{aligned}$$

និង

$g'(1) = 105(1)^2 - 42(1) = 63$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $h'(x)$ និង $h'(2)$ ។

យើងមាន $h(x) = (-3x^2 + 3x)(5x^3 - 2x^2) - 50$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$h'(x) = (-3x^2 + 3x)' \cdot (5x^3 - 2x^2) + (-3x^2 + 3x) \cdot (5x^3 - 2x^2)' - (50)'$$

$= (-6x+3)\cdot(5x^3-2x^2) + (-3x^2+3x)\cdot(15x^2-4x)$

$= -30x^4+12x^3+15x^3-6x^2-45x^4+12x^3+45x^3-12x^2$

$= -75x^4+84x^3-18x^2$

និង

$h'(2) = -75(2)^4+84(2)^3-18(2)^2$

$\quad = -1200 + 672 - 72 = -600$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(3)$ នៃអនុគមន៍

$$y = \frac{4x+18}{3x-7}$$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(2)$ នៃអនុគមន៍

$$y = \frac{5x^2-3}{2(2x^2+7)}$$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(t)$ និង $f'(1)$ នៃអនុគមន៍

$$f(t) = \frac{(t^2+2)(-3t^2+5t)}{5t^3-2t^2}$$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(3)$ ។

យើងមាន $y = \dfrac{4x+18}{3x-7}$ កំណត់បានចំពោះ $3x-7 \neq 0$

សមមូល $x \neq \dfrac{7}{3}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = \frac{(4x+18)'\cdot(3x-7)-(4x+18)\cdot(3x-7)'}{(3x-7)^2}$$

$$= \frac{4\cdot(3x-7)-(4x+18)\cdot 3}{(3x-7)^2}$$

$$= \frac{12x-28-12x-54}{(3x-7)^2}$$

$$= -\frac{82}{(3x-7)^2}\ ,\ \ x \neq \frac{7}{3}$$

និង

$$y'(3) = -\frac{82}{(3(3)-7)^2} = -\frac{82}{4} = -\frac{41}{2}$$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(2)$ ។

យើងមាន $y = \dfrac{5x^2-3}{2(2x^2+7)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5x^2-3}{2x^2+7}$ កំណត់បាន

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ពីព្រោះ $2x^2+7 \neq 0$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(5x^2-3)'\cdot(2x^2+7)-(5x^2-3)\cdot(2x^2+7)'}{(2x^2+7)^2}$$

$$= \frac{10x\cdot(2x^2+7)-(5x^2-3)\cdot 4x}{2(2x^2+7)^2}$$

$$= \frac{20x^3 + 70x - 20x^3 + 12x}{2(2x^2+7)^2}$$

$$= \frac{82x}{2(2x^2+7)^2} = \frac{41x}{(2x^2+7)^2} \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}$$

និង

$$y'(2) = \frac{41(2)}{(2(2)^2+7)^2} = \frac{82}{225} \text{ ។}$$

គ. គណនាដេរីវេ $f'(t)$ និង $f'(1)$ ។

យើងមាន $f(t) = \dfrac{(t^2+2)(-3t^2+5t)}{5t^3-2t^2}$

$$= \frac{-3t^4 + 5t^3 - 6t^2 + 10t}{5t^3 - 2t^2}$$

$$= \frac{-3t^3 + 5t^2 - 6t + 10}{5t^2 - 2t}$$

កំណត់បានចំពោះ $5t^3 - 2t^2 \neq 0$ សមមូល $t \neq 0,\ t \neq \dfrac{2}{5}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$f'(t) = \frac{(-3t^3+5t^2-6t+10)'(5t^2-2t) - (-3t^3+5t^2-6t+10)(5t^2-2t)'}{(5t^2-2t)^2}$$

$$= \frac{(-9t^2+10t-6)(5t^2-2t) - (-3t^3+5t^2-6t+10)(10t-2)}{(5t^2-2t)^2}$$

$$= \frac{-15t^4 + 12t^3 + 20t^2 - 100t + 20}{(5t^2 - 2t)^2}\ ,\ t \neq 0,\ t \neq \frac{2}{5}$$

និង

$$f'(1) = \frac{-15(1)^4 + 12(1)^3 + 20(1)^2 - 100(1) + 20}{(5(1)^2 - 2(1))^2} = -7$$ ។

- ចំពោះអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលៈ $f(x) = e^x$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$ ។

ដូចនេះ បើ $f(x) = e^x$ នោះ $f'(x) = e^x$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(-5)$ នៃអនុគមន៍

$y = -4e^x$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(1)$ នៃអនុគមន៍

$y = 2e^x + 3x^5 - 6x + 28$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(0)$ នៃអនុគមន៍

$$g(x) = \frac{8e^x + 30}{5e^x - 2} \text{ ។}$$

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(-5)$ ។

យើងមាន $y = -4e^x$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = -4(e^x)' = -4e^x$$

និង

$$y'(-5) = -4e^{-5} \text{ ។}$$

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(1)$ ។

យើងមាន $y = 2e^x + 3x^5 - 6x + 28$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = (2e^x)' + (3x^5)' - (6x)' + (28)'$$

$$= 2e^x + 15x^4 - 6 + 0 = 2e^x + 15x^4 - 6$$

និង

$$y'(1) = 2e^1 + 15(1)^4 - 6 = 2e + 9 \text{ ។}$$

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(0)$ ។

យើងមាន $g(x)=\dfrac{8e^x+30}{5e^x-2}$ កំណត់បានចំពោះ

$5e^x-2\neq 0$ សមមូល $x\neq \ln\dfrac{2}{5}$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$g'(x)=\frac{(8e^x+30)'(5e^x-2)-(8e^x+30)(5e^x-2)'}{(5e^x-2)^2}$$

$$=\frac{8e^x\cdot(5e^x-2)-(8e^x+30)\cdot 5e^x}{(5e^x-2)^2}$$

$$=\frac{40e^{2x}-16e^x-40e^{2x}-150e^x}{(5e^x-2)^2}$$

$$=-\frac{166e^x}{(5e^x-2)^2}\,,\ x\neq\ln\frac{2}{5}$$

និង

$$g'(0)=-\frac{166e^0}{(5e^0-2)^2}=-\frac{166}{9}\ ។$$

- ចំពោះអនុគមន៍លោការីតនេពែ៖ $f(x)=\ln x\,,\ x>0$

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$ ។

តាង $t=\ln(x+h)-\ln x$ ។

នាំឱ្យ $t=\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$ សមមូល $\frac{x+h}{x}=e^t$

សមមូល $h=x(e^t-1)$ ។

នៅពេល $h\to 0$ នោះ $t\to 0$ ។

យើងបាន

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{x(e^t-1)}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{x}$$ ។

ដូចនេះ បើ $f(x)=\ln x$ នោះ $f'(x)=\frac{1}{x}$ ដែល $x>0$ ។

សម្គាល់

ក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កម្រិតមូលដ្ឋាន) របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៧) អ្នកនិពន្ធបានស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះតាមអនុគមន៍ច្រាស គឺមិនប្រើតាមនិយមន័យទេ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(8)$ នៃអនុគមន៍

$y=-6\ln x$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(1)$ នៃអនុគមន៍

$y = 3\ln x - 6e^{x} - 7x^{3} + 2x$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(\mathrm{e}^{2})$ នៃអនុគមន៍

$g(x) = \dfrac{4\ln x - 10}{3\ln x + 8}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(8)$ ។

យើងមាន $y = -6\ln x$ កំណត់បានចំពោះ $x > 0$ ។

តាមរូបមន្តងាយនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = -6(\ln x)' = -\frac{6}{x}$$

និង

$$y'(8) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}\ ។$$

ខ. គណនាដេរីវេ y' និង $y'(1)$ ។

យើងមាន $y = 3\ln x - 6e^{x} - 7x^{3} + 2x$ កំណត់បាន
ចំពោះ $x > 0$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$y' = (3\ln x)' - (6e^{x})' - (7x^{3})' + (2x)'$$

$$= \frac{3}{x} - 6e^x - 21x^2 + 2$$

និង

$$y'(1) = \frac{3}{1} - 6e^1 - 21(1)^2 + 2 = -6e - 16 \text{ ។}$$

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ និង $g'(e^2)$ ។

យើងមាន $g(x) = \dfrac{4\ln x - 10}{3\ln x + 8}$ កំណត់បានចំពោះ $x > 0$

និង $3\ln x + 8 \neq 0$ សមមូល $x > 0$ និង $x \neq e^{-8/3}$

សមមូល $x \in D = (0, e^{-8/3}) \cup (e^{-8/3}, +\infty)$ ។

តាមរូបមន្តងាយនិងរូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេ យើងបាន

$$g'(x) = \frac{(4\ln x - 10)' \cdot (3\ln x + 8) - (4\ln x - 10) \cdot (3\ln x + 8)'}{(3\ln x + 8)^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{x} \cdot (3\ln x + 8) - (4\ln x - 10) \cdot \frac{3}{x}}{(3\ln x + 8)^2}$$

$$= \frac{(12\ln x + 32) - (12\ln x - 30)}{x(3\ln x + 8)^2}$$

$$= \frac{62}{x(3\ln x + 8)^2}, \ \forall x \in D$$

និង

$$g'(e^2)=\frac{62}{e^2(3\ln e^2+8)^2}=\frac{31}{98e^2}$$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. បើ $f'(3)=5$ ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+3)-f(3-x)}{\sin 2x}$$ ។

ខ. បើ $g'(5)=12$ ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\sin x+5)-g(\tan x+5)}{\sin x-\tan x}$$ ។

គ. បើ $h'(\alpha)=8$ ចូរគណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x)-h(\alpha+3x)}{x}$$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+3)-f(3-x)}{\sin 2x}$ ។

យើងមាន៖ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+3)-f(3-x)}{\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x+3)-f(3-x)}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+3)-f(3-x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x+3) - f(3-x)}{2x} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[f(x+3) - f(3)] + [f(3) - f(3-x)]}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f(x+3) - f(3)}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f((-x)+3) - f(3)}{(-x)}$$

$$= \frac{1}{2} f'(3) + \frac{1}{2} f'(3) = f'(3) = 5 \text{ ។}$$

ដូចនេះ យើងបាន $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x+3) - f(3-x)}{\sin 2x} = 5$ ។

ខ. គណនា $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(\sin x+5) - g(\tan x+5)}{\sin x - \tan x}$ ។

យើងមាន៖ $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(\sin x+5) - g(\tan x+5)}{\sin x - \tan x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[g(\sin x+5) - g(5)] + [g(5) - g(\tan x+5)]}{\sin x - \tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(\sin x+5) - g(5)}{\sin x(1 - \frac{1}{\cos x})} + \lim_{x\to 0} \frac{g(5) - g(\tan x+5)}{\tan x(\cos x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} [\frac{g(\sin x+5) - g(5)}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x - 1}]$$

$$- \lim_{x\to 0} [\frac{g(\tan x+5) - g(5)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x - 1}]$$

$$= \lim_{x\to 0}[g'(5)\cdot\frac{\cos x}{\cos x-1}] - \lim_{x\to 0}[g'(5)\cdot\frac{1}{\cos x-1}]$$

$$= \lim_{x\to 0}[g'(5)\cdot\frac{\cos x-1}{\cos x-1}]$$

$$= \lim_{x\to 0}[g'(5)\cdot 1] = g'(5) = 12$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $\lim_{x\to 0}\frac{g(\sin x+5) - g(\tan x+5)}{\sin x-\tan x} = 12$ ។

គ. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x) - h(\alpha+3x)}{x}$ ។

យើងមាន៖ $\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x) - h(\alpha+3x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[h(\alpha+5x)-h(\alpha)]+[h(\alpha)-h(\alpha+3x)]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x)-h(\alpha)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha)-h(\alpha+3x)}{x}$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x)-h(\alpha)}{5x} - 3\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+3x)-h(\alpha)}{3x}$$

$$= 5h'(\alpha) - 3h'(\alpha) = 2h'(\alpha) = 2(8) = 16$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $\lim_{x\to 0}\frac{h(\alpha+5x) - h(\alpha+3x)}{x} = 16$ ។

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

ពីព្រោះ $|x| \geq 0$ នាំឱ្យ $1+|x| \neq 0$ ហើយ $(|x|)' = \dfrac{|x|}{x}$

ចំពោះ $x \neq 0$ (ឧទាហរណ៍មុន) ។

- បើ $x \neq 0$ នោះតាមរូបមន្តនៃដេរីវេ យើងបាន

$$f'(x) = \frac{(x)'(1+|x|) - x(1+|x|)'}{(1+|x|)^2}$$

$$= \frac{1+|x| - x(\frac{|x|}{x})}{(1+|x|)^2}$$

$$= \frac{1+|x| - |x|}{(1+|x|)^2} = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

- បើ $x = 0$ នាំឱ្យ

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{1+|h|} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+|h|} = \frac{1}{1+|0|} = 1$$ ។

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^2}$

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$f(x) = (1-x)(2-x)(3-x)\times\ldots\times(2024-x)$ ។

ចូរគណនា $f'(1)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

គណនា $f'(1)$ ។

យើងមាន $f(x) = (1-x)(2-x)(3-x)\times\ldots\times(2024-x)$
កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

តាមនិយមន័យនៃដេរីវេ យើងបាន

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(1+h)][2-(1+h)][3-(1+h)]\times\ldots\times[2024-(1+h)]}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} (1-h)(2-h)\times\ldots\times(2023-h)$$

$$= -1\times 2\times\ldots\times 2023 = -2023!$$ ។

ដូចនេះ $f'(1) = -2023!$ ។

៤.៣ រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ទ្រឹស្តីបទទី៤[៩]

គេឱ្យអនុគមន៍ $u = g(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x = a$ និង $y = f(u)$ មានដេរីវេត្រង់ $u_0 = g(a)$ ។ នោះគេបាន $F(x) = (f \circ g)(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x = a$ ហើយ

$$F'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(u_0) \cdot g'(a)$$
$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \text{ ។}$$

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់ដូចតទៅ៖

យើងមាន $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ ។

តាមនិយមន័យ យើងបាន

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right],$$
$$g(x) \neq g(a)$$

$$= \lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= f'(u_0) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

---

[៩] សួន សូវ៉ាន់ << *វិភាគចំនួនពិត ភាគ១* >> សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧ ។

ពីព្រោះ $u=g(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ និង $y=f(u)$ មានដេរីវេត្រង់ $u_0=g(a)$ ។

ដូចនេះ $F(x)=(f\circ g)(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ ហើយ

$F'(a)=(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$ ។

ដោយ $x=a$ និង $u_0=g(a)$ ជាធាតុទូទៅណាមួយក្នុងសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ នោះយើងសម្រួលទ្រឹស្តីបទទៅជា៖

បើអនុគមន៍ $u=g(x)$ និង $y=f(u)$ មានដេរីវេរៀងគ្នា នោះគេបាន $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ ឬ

$\dfrac{d}{dx}f(u(x))=f'(u)\cdot u'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(1)$ នៃអនុគមន៍

$y=2(7x^2-5)^5$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(2)$ នៃអនុគមន៍

$$y=\frac{3}{(3x^3-4x^2+5x-8)^{12}}$$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(1)$ ។

យើងមាន $y=2(7x^2-5)^5$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

យើងតាង $u = 7x^2 - 5$ និង $y = 2u^5$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{du}{dx} = 14x$ និង $\dfrac{dy}{du} = 10u^4$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ យើងបាន

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 10u^4 \cdot 14x = 140x(7x^2 - 5)^4$$

និង

$$y'(1) = 140(1)(7(1)^2 - 5)^4 = 140 \cdot 16 = 2240 \text{ ។}$$

ខ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(2)$ ។

យើងមាន

$$y = \frac{3}{(3x^3 - 4x^2 + 5x - 8)^{12}} = 3(3x^3 - 4x^2 + 5x - 8)^{-12}$$

កំណត់បានចំពោះ $3x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \neq 0$ ។

យើងតាង $u = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 8$ និង $y = 3u^{-12}$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{du}{dx} = (3x^3)' - (4x^2)' + (5x)' - (8)'$

$$= 9x^2 - 8x + 5$$

និង $\dfrac{dy}{du} = 3(-12)u^{-13} = -36u^{-13}$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ យើងបាន

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -36u^{-13} \cdot (9x^2 - 8x + 5)$$

$$= -36(9x^2 - 8x + 5)(3x^3 - 4x^2 + 5x - 8)^{-13}$$

$$= \frac{-36(9x^2 - 8x + 5)}{(3x^3 - 4x^2 + 5x - 8)^{13}}$$

ចំពោះ $3x^3 - 4x^2 + 5x - 8 \neq 0$

និង

$$y'(2) = \frac{-36(9(2)^2 - 8(2) + 5)}{(3(2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 8)^{13}}$$

$$= \frac{-36 \cdot 25}{10^{13}} = -900 \cdot 10^{-13} = -9 \cdot 10^{-11}$$ ។

ឧទាហរណ៍

ក. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(1)$ នៃអនុគមន៍

$y = 7(2e^x - 5x^3 + 4)^7$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(2)$ នៃអនុគមន៍

$y = \ln(\sqrt{1 + x^2})$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(0)$ នៃអនុគមន៍

$$y = 10\ \ln\left(\frac{2x^4+3e^x}{5x^4+7e^x}\right)$$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(1)$ ។

យើងមាន $y = 7(2e^x - 5x^3 + 4)^7$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

យើងតាង $u = 2e^x - 5x^3 + 4$ និង $y = 7u^7$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{du}{dx} = (2e^x)' - (5x^3)' + (4)' = 2e^x - 15x^2$

និង $\dfrac{dy}{du} = 7(7u^6) = 49u^6$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ យើងបាន

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= 49u^6 \cdot (2e^x - 15x^2)$$

$$= 49(2e^x - 15x^2)(2e^x - 5x^3 + 4)^6$$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

និង

$$y'(1) = 49(2e^1 - 15(1)^2)(2e^1 - 5(1)^3 + 4)^6$$

$$= 49(2e - 15)(2e - 1)^6$$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(2)$ ។

យើងមាន $y=\ln(\sqrt{1+x^2})$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$

ពីព្រោះ $\sqrt{1+x^2}>0$ ។

យើងតាង $u=\sqrt{1+x^2}$ និង $y=\ln u$ ។

នាំឱ្យ $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

និង $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ យើងបាន

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$$

និង

$$y'(2)=\frac{2}{1+2^2}=\frac{2}{5}$$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $y'(x)$ និង $y'(0)$ ។

យើងមាន $y = 10\ln\left(\dfrac{2x^4+3e^x}{5x^4+7e^x}\right)$ ។

យើងតាង $u = \dfrac{2x^4+3e^x}{5x^4+7e^x}$ និង $y = 10\ln u$ ។

នាំឱ្យ

$$\frac{du}{dx} = \frac{(2x^4+3e^x)'(5x^4+7e^x)-(2x^4+3e^x)(5x^4+7e^x)'}{(5x^4+7e^x)^2}$$

$$= \frac{(8x^3+3e^x)(5x^4+7e^x)-(2x^4+3e^x)(20x^3+7e^x)}{(5x^4+7e^x)^2}$$

$$= \frac{x^4e^x-4x^3e^x}{(5x^4+7e^x)^2}$$

និង $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{10}{u}$ ។

តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ យើងបាន

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{10}{u}\cdot\frac{(x^4e^x-4x^3e^x)}{(5x^4+7e^x)^2}$$

$$= \frac{10(x^4e^x-4x^3e^x)}{(5x^4+7e^x)^2\cdot\left(\dfrac{2x^4+3e^x}{5x^4+7e^x}\right)}$$

$$= \frac{10(x^4e^x - 4x^3e^x)}{(5x^4 + 7e^x)(2x^4 + 3e^x)}$$

និង

$$y'(0) = \frac{10((0)^4e^0 - 4(0)^3e^0)}{(5(0)^4 + 7e^0)(2(0)^4 + 3e^0)} = \frac{0}{21} = 0 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y លើទំនាក់ទំនង៖

ក. $2xy^2 + 3yx^2 = 7$ ដែល $y = y(x)$

ខ. $5x + 6y + 4xy = 2x^2 + 3y^5$

ដែល $y = y(x)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

ក. រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $2xy^2 + 3yx^2 = 7$

ដែល $y = y(x)$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(2xy^2 + 3yx^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

សមមូល $\frac{d}{dx}(2xy^2) + \frac{d}{dx}(3yx^2) = 0$

សមមូល $2\frac{d}{dx}(x)\cdot y^2 + 2x\cdot\frac{d}{dx}(y^2) + 3\frac{d}{dx}(y)\cdot x^2 + 3y\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = 0$

សមមូល $2y^2 + 2x\cdot 2y\frac{dy}{dx} + 3x^2\frac{dy}{dx} + 3y\cdot 2x = 0$

(រូបមន្តបណ្តាក់ $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\cdot\frac{dy}{dx} = 2y\,y'$)

សមមូល $2y^2 + 4xy\,y' + 3x^2y' + 6x\,y = 0$

សមមូល $y'(4xy + 3x^2) = -2y^2 - 6x\,y$

ដូចនេះ $y' = \frac{-2y^2 - 6x\,y}{4xy + 3x^2}$ ។

ខ. រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $5x + 6y + 4xy = 2x^2 + 3y^5$

ដែល $y = y(x)$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(5x + 6y + 4xy) = \frac{d}{dx}(2x^2 + 3y^5)$$

សមមូល $\frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(6y) + \frac{d}{dx}(4xy) = \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(3y^5)$

សមមូល $5 + 6\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(4x)\cdot y + 4x\cdot\frac{dy}{dx} = 4x + 15y^4\frac{dy}{dx}$

(រូបមន្តបណ្តាក់)

សមមូល $5+4y-4x=15y^4\frac{dy}{dx}-6\frac{dy}{dx}-4x\frac{dy}{dx}$

សមមូល $(15y^4-6-4x)\frac{dy}{dx}=5+4y-4x$

ដូចនេះ $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{5+4y-4x}{15y^4-6-4x}$ ។

ឧទាហរណ៍

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y លើទំនាក់ទំនង

$3x^2+6y^2+4xy=5x^3y^6$ ដែល $y=y(x)$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។

យើងមានទំនាក់ទំនង $3x^2+6y^2+4xy=5x^3y^6$

ដែល $y=y(x)$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}(3x^2+6y^2+4xy)=\frac{d}{dx}(5x^3y^6)$$

សមមូល $\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(6y^2)+\frac{d}{dx}(4xy)=\frac{d}{dx}(5x^3)\cdot y^6+5x^3\cdot\frac{d}{dx}(y^6)$

សមមូល $6x+12yy'+4y+4xy'=15x^2y^6+30x^3y^5y'$

(រូបមន្តបណ្តាក់)

សមមូល $12yy' + 4xy' - 30x^3y^5y' = 15x^2y^6 - 6x - 4y$

សមមូល $(12y + 4x - 30x^3y^5)y' = 15x^2y^6 - 6x - 4y$

ដូចនេះ $y' = \dfrac{15x^2y^6 - 6x - 4y}{12y + 4x - 30x^3y^5}$ ។

ឧទាហរណ៍

រក y' ដែល $y = y(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខ្សែកោង

$(x^2 + y^2)^3 = x^2y^2$ ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

រក y' ។

យើងមានសមីការ $(x^2 + y^2)^3 = x^2y^2$

ដែល $y = y(x)$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ ដោយប្រើរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ផលគុណ និង អនុគមន៍បណ្ដាក់ យើងបាន៖

$$\frac{d}{dx}[(x^2 + y^2)^3] = \frac{d}{dx}(x^2y^2)$$

សមមូល $3(x^2 + y^2)^2(2x + 2y\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{d}{dx}(x^2)\cdot y^2 + x^2\cdot\dfrac{d}{dx}(y^2)$

សមមូល $6x(x^2 + y^2)^2 + 6y(x^2 + y^2)^2\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 2x^2y\dfrac{dy}{dx}$

(រូបមន្តបណ្ដាក់)

សមមូល $6y(x^2+y^2)^2\dfrac{dy}{dx}-2x^2y\dfrac{dy}{dx}=2xy^2-6x(x^2+y^2)^2$

សមមូល $[6y(x^2+y^2)^2-2x^2y]y'=2xy^2-6x(x^2+y^2)^2$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{2xy^2-6x(x^2+y^2)^2}{6y(x^2+y^2)^2-2x^2y}$ ។

ជាចុងក្រោយនេះ ចំពោះសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍** (Study of Derivative Theory of Functions) (ភាគទី១) នេះ ខ្ញុំបានសិក្សាស្រាវជ្រាវត្រឹមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ប៉ុណ្ណោះ ។ ខ្ញុំនឹងសិក្សាស្រាវជ្រាវបន្តអំពី ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់សម្រាប់សៀវភៅភាគទី២ ។

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន

បន្ទាប់ពីការអានឬសិក្សាលើសៀវភៅ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍** (Study of Derivative Theory of Functions) (ភាគទី១) នេះ សិស្ស និស្សិត និង អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាអាចៈ

- មានការយល់ដឹងអំពីគោលការណ៍នៃដេរីវេនៃអនុគមន៍ក្នុងគណិតវិទ្យាមានៈ ប្រធានបទ ភាសាប្រើ និយមន័យ និមិត្តសញ្ញា ការគណនា ការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្ត និង វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ ។

- ពង្រីង និង ពង្រឹកបន្ថែមសមត្ថភាពបង្រៀន និង រៀន តាមរយៈការសិក្សាស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីដេរីវេក្នុងគណិតវិទ្យា និង មានក្បួនខ្នាតដោះស្រាយឧទាហរណ៍ឬលំហាត់ដេរីវេបានត្រឹមត្រូវ ព្រមទាំងអភិវឌ្ឍបំណិនការគិតបានសមហេតុផល ដោយមានអំណះអំណាងតាមនិយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ និង រូបមន្ត ។

- ធ្វើទំនាក់ទំនងអន្តរកម្មវិធីសិក្សាពីគណិតវិទ្យាជាមួយវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងទៀតដូចជា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា វិស្វកម្ម សេដ្ឋកិច្ច និង ជីវវិទ្យា ។

- យកចំណេះដឹងនៃ **ការសិក្សាទ្រឹស្តីដេរីវេនៃអនុគមន៍** ទៅអនុវត្តក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់មនុស្សដូចជា ការរកល្បឿន ការរកអត្រាដែលបរិមាណមួយប្រែប្រួល ដោយធៀបនឹងបរិមាណមួយទៀត ។ល។

ឯកសារយោង

១. សួន សូវ៉ាន់ << *វិភាគចំនួនពិត ភាគ១* >> សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧ ។

២. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា << *គណិតវិទ្យា២* >> សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០០ ។

៣. គណៈកម្មការនិពន្ធ << *គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន* >> បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ ២០០៩ ។

៤. គណៈកម្មការនិពន្ធ << *គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន* >> បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ ២០១៧ ។

៥. https://www.encyclopedia.com/science-and-technology/mathematics/mathematics/derivative

៦. https://marktomforde.com/academic/miscellaneous/calculus-history/calchistory.html

៧. https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function

៨. https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_1200%3A_Calculus_for_Scientists_I/1%3A_Limit__and_Continuity_of_Functions/1.5%3A_Formal_Definition_of_a_Limit_(optional)

៩. https://www.mathsisfun.com/calculus/limits-formal.html

១០. https://www.geeksforgeeks.org/formal-definition-of-limits/

១១. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Calculus_(OpenStax)/03%3A_Derivatives/3.02%3A_The_Derivative_as_a_Function

១២. https://education.ti.com/html/t3_free_courses/calculus84_online/mod10/mod10_lesson1.html

១៣. https://socratic.org/questions/what-is-the-formal-definition-of-a-derivative

១៤. https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/DerivativeProofs.aspx#Extras_DerPf_DefCont

១៥. https://math24.net/definition-derivative.html#example1

១៦. https://www.slideshare.net/iramkhan66/applications-of-derivatives-56443012

១៧. https://www.superprof.co.uk/resources/academic/maths/calculus/derivatives/one-sided-derivative.html

୧୮. https://www.brainkart.com/article/One-sided-derivatives-(left-hand-and-right-hand-derivatives)---The-concept-of-derivative_36105/

୧୯. https://www.brainkart.com/article/The-concept-of-derivative_36101/

୨୦. https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative

୨୧. http://www.sosmath.com/tables/derivative/derivative.html