ស៊ីត និង ការពង្រីក

(Sequences and Extension)

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ខែមីនា ឆ្នាំ២០២១

បានឃើញ និងឯកភាព
26/3/2021

បណ្ឌិត អ៊ឹម មុណ្ណា

ស៊ីត និង ការពង្រីក

សេចក្តីផ្តើម

ពេលនេះ យើងខ្ញុំសូមលើកយកអត្ថបទស្រាវជ្រាវមួយមកបង្ហាញអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សា គឺសិក្សាអំពី ស៊ីត ដែលលោកអ្នកបានធ្លាប់រៀននៅមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិមកហើយ។ ស៊ីត គឺជាបញ្ជីនៃតួ/វត្ថុដែលត្រូវបានរៀបចំតាមលំដាប់លំដោយ។ [1] ជាការពិត ស៊ីតមានទម្រង់ជាច្រើន តែក្នុងការសិក្សានេះយើងនឹងលើកយកស៊ីតពិសេសមួយចំនួន ស៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែលំដាប់ទី k និង ប្រព័ន្ធសមីការស៊ីតក្នុងទម្រង់មួយមកបង្ហាញ។ ចំពោះគោលបំណងនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ គឺចង់បង្ហាញពីទ្រឹស្តីបទមួយដែលយើងខ្ញុំបានស្រាវជ្រាវនិងរៀបរៀងរួចហើយនៅថ្ងៃទី១២ ខែមករា ឆ្នាំ២០១៦ និង ចុះផ្សាយលើទំព័រ **ផ្នែកគណិតវិទ្យា និងស្ថិតិ** នៅថ្ងៃទី១៣ ខែមករា ឆ្នាំ២០១៦ ដោយបានដាក់ឈ្មោះថា **ទ្រឹស្តីបទស៊ីតវិជ្ជា** (Vichea's Sequence Theorem) មិនផ្លូវការទេ ហើយបានចុះផ្សាយព្រឹត្តិបត្រប្រចាំត្រីមាស ឆ្នាំទី១ លេខ៣ ខែកញ្ញា គ.ស.២០១៦ នៅរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា។ ទ្រឹស្តីបទនេះ គឺបង្ហាញរូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតសម្រាប់ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការស៊ីតក្នុងទម្រង់មួយ ដើម្បីជួយសម្រួលដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និង អ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងការសិក្សាជំនាញគណិតវិទ្យា ហើយជាឯកសារជំនួយសម្រាប់រៀននិងបង្រៀនផងដែរ។ តើស៊ីតពិសេសមួយចំនួនមានអ្វីខ្លះ? តើទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែលំដាប់ទី k មានសមីការបែបណា? តើទ្រឹស្តីបទនេះមានអំណះអំណាងបែបណា និង ការអនុវត្តរបស់វា?

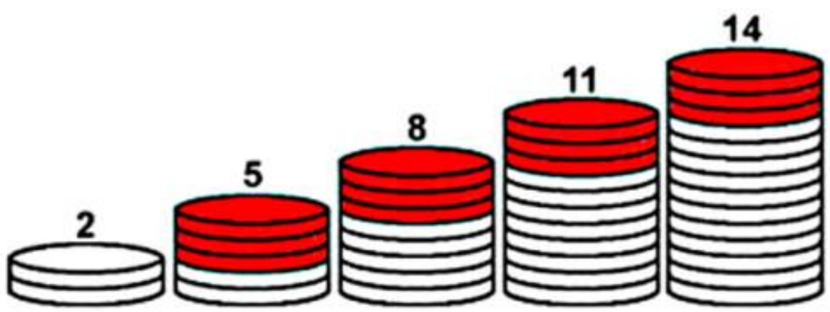
១. ស៊ីតពិសេស

ផ្នែកទី១នេះ យើងខ្ញុំលើកយកស៊ីតពិសេសមួយចំនួនដូចជា ស៊ីតនព្វន្ត ស៊ីតធរណីមាត្រ ស៊ីតអាម៉ូនិក និង ស៊ីតហ្វីបូណាកស៊ី ។ យើងមាននិយមន័យនៃស៊ីតទាំងនេះភ្ជាប់ជាមួយនឹងរូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតផង។

ចំពោះស៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទី១ $u_1 = a$ និង ផលសងរួម d គឺវាមានទម្រង់

$u_1 = a$, $u_2 = a + d$, $u_3 = a + 2d$, ... នោះតួទី n នៃស៊ីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$ [2] ។

រូបទី១៖ ឧទាហរណ៍មួយ នៃស៊ីតនព្វន្ត



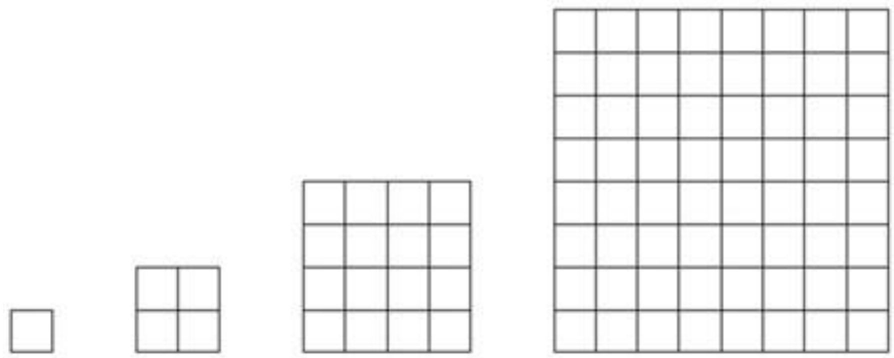
[1] https://byjus.com/maths/sequence-and-series/

[2] https://byjus.com/maths/sequence-and-series/

ចំពោះស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទី១ v_1 និង ផលធៀបរួម q គឺវាមានទម្រង់ v_1 , $v_2 = v_1 q$, $v_3 = v_1 q^2$, ... នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $v_n = v_1 q^{n-1}$ [3] ។

រូបទី២៖ ឧទាហរណ៍មួយ

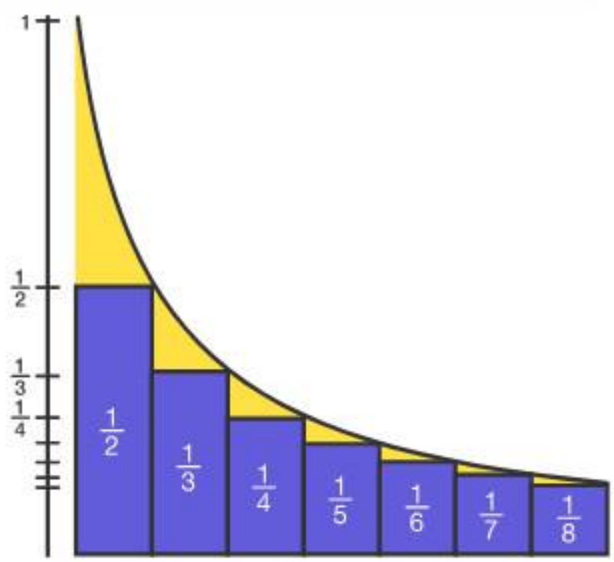
នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ



ចំពោះស្វ៊ីតអាម៉ូនិក $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតដែលមានតួទាំងអស់ គឺច្រាសនៃតួរបស់ស្វ៊ីតនពន្ត។ វាជាស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ $h_1 = \dfrac{1}{a}$, $h_2 = \dfrac{1}{a+d}$, $h_3 = \dfrac{1}{a+2d}$, ... នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតអាម៉ូនិកកំណត់ដោយ $h_n = \dfrac{1}{a+(n-1)d}$ [4] ដែល $\dfrac{-a}{d} \notin \mathbb{N}$, $n-1 \in \mathbb{N}$ ។

រូបទី៣៖ ឧទាហរណ៍មួយ

នៃស្វ៊ីតអាម៉ូនិក



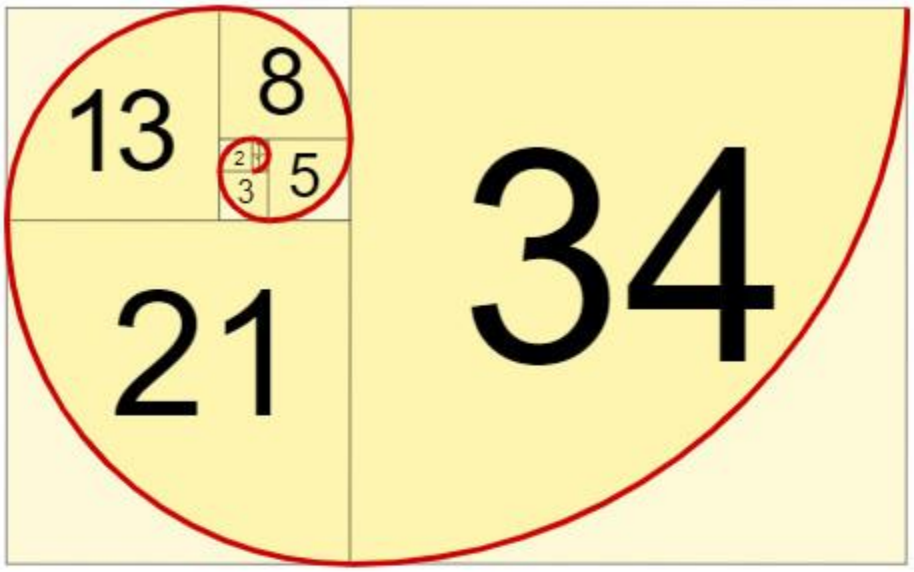
[3] https://byjus.com/maths/sequence-and-series/

[4] https://www.aplustopper.com/harmonic-progression-mathematics/

ចំពោះស៊្វីតហ្វីបូណាកស៊ី ជាស៊្វីតដែលមានទម្រង់ $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ ឬ ជាស៊្វីតដែលមានតួដំបូងពីរគឺ $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ហើយតួបន្តបន្ទាប់នីមួយៗជាផលបូកនៃតួមុនពីរគឺ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ចំពោះ $n \in \{2,3,\ldots\}$ ។ នោះតួទី n នៃស៊្វីតហ្វីបូណាកស៊ីកំណត់ដោយ

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^n - (1-\phi)^n\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^n - (-\phi)^{-n}\}$$ [5]

ដែល $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\ldots$ ជាផលធៀបដូចមាស (Golden Ratio)។



រូបទី៤៖ ឧទាហរណ៍មួយនៃស៊្វីតហ្វីបូណាកស៊ី

២. ទំនាក់ទំនងកំណើន

ស៊្វីតខ្លះផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន (Recurrence relation)។ ចំពោះស៊្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែលំដាប់ទី k គឺមានទម្រង់ [6]

$$c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} = b_n$$

ដែល $c_0 \neq 0$ ។ បើ $b_n = 0$ ទំនាក់ទំនងនេះហៅថា ទំនាក់ទំនងកំណើនអូម៉ូហ្សែន។ ករណីផ្សេងទៀត ហៅថា ទំនាក់ទំនងកំណើនមិនអូម៉ូហ្សែន។

យើងនឹងពិនិត្យមើលទំនាក់ទំនងកំណើនលំដាប់ទី២គឺ $c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = 0$ [7] ។

---

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

[6] https://sites.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/cs310-04w/notes/dm-recurrences.pdf

[7] https://sites.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/cs310-04w/notes/dm-recurrences.pdf

សមីការនេះមានសមីការសម្គាល់គឺ $c_0 r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ ដែល r_1, r_2 ជាឫសវា។

- ករណីសមីការសម្គាល់មានឫសចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ។

- ករណីសមីការសម្គាល់មានឫសចំនួនពិតឌុប $r_1 = r_2 = r$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

ដែល c_1, c_2 ជាចំនួនថេរ។

- ករណីសមីការសម្គាល់មានឫសចំនួនកុំផ្លិច $r_1 = re^{\alpha i}$, $r_2 = re^{-\alpha i}$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ

$$u_n = r^n [k_1 \cos(n\alpha) + k_2 \sin(n\alpha)]$$

ដែល k_1, k_2 ជាចំនួនថេរ។

៣. ការពង្រីករូបមន្តស្វ៊ីត

ឥឡូវនេះ យើងនឹងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់មួយគឺ [8]

$$(I)\quad \begin{cases} u_1 = c\ ,\ v_1 = d \\ u_{n+1} = a_1 u_n + b_1 v_n \\ v_{n+1} = a_2 u_n + b_2 v_n\ ,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

ដែល a_1, a_2, b_1, b_2, c និង d ជាចំនួនពិតថេរ។ ប្រសិនបើយើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធ (I) នេះតាមទំនាក់ទំនងកំណើនលំដាប់ទី២ $c_0 u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = 0$ នោះយើងអាចដោះស្រាយប្រព័ន្ធ (I) បាន តែឃើតជាងរូបមន្តដែលយើងខ្ញុំបានរៀបរៀងឡើងដូចតទៅ៖

ទ្រឹស្តីបទទី១

គេមាន a_1, a_2, b_1, b_2, c និង d ជាចំនួនពិតថេរ និង ស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = c\ ,\ v_1 = d \\ u_{n+1} = a_1 u_n + b_1 v_n \\ v_{n+1} = a_2 u_n + b_2 v_n\ ,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

តាង $\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = -\Delta_1$ ។

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation

1. ប្រសិនបើ $a_1+b_2=0$, នោះយើងបាន $u_{2n-1}=c\ \alpha^{n-1}$, $u_{2n}=(a_1 c+b_1 d)\alpha^{n-1}$, $v_{2n-1}=d\ \alpha^{n-1}$ និង $v_{2n}=(a_2 c-a_1 d)\ \alpha^{n-1}$ ដែល $\alpha=a_2 b_1+a_1^{\ 2}$ ។

2. ប្រសិនបើ $a_2\neq 0$ និង $\Delta\geq 0$ នោះវាមាន $(r\ ,\theta)\in\mathbb{R}^2$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_{n+1}+\theta\ v_{n+1}=r\ (u_n+\theta\ v_n)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

3. ប្រសិនបើ $\Delta=0$ និង $a_1+b_2\neq 0$ នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺ

$$u_n=[c+(n-1)\mu]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1} \text{ និង } v_n=[d+(n-1)\mu_1]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1}$$

ដែល $\mu=\dfrac{a_1 c+2b_1 d-b_2 c}{a_1+b_2}$ និង $\mu_1=\dfrac{2a_2 c+b_2 d-a_1 d}{a_1+b_2}$ ។

4. ប្រសិនបើ $\Delta>0$ និង $a_1+b_2\neq 0$ នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺ

$u_n=\lambda\ r_1^{\ n-1}+\mu\ r_2^{\ n-1}$ និង $v_n=\lambda_1 r_1^{\ n-1}+\mu_1 r_2^{\ n-1}$

ដែល $r_1=\dfrac{a_1+b_2-\sqrt{\Delta}}{2}$, $r_2=\dfrac{a_1+b_2+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\lambda=\dfrac{c\sqrt{\Delta}+b_2 c-a_1 c-2b_1 d}{2\sqrt{\Delta}}$,

$\mu=\dfrac{c\sqrt{\Delta}+a_1 c+2b_1 d-b_2 c}{2\sqrt{\Delta}}$, $\lambda_1=\dfrac{d\sqrt{\Delta}+a_1 d-2a_2 c-b_2 d}{2\sqrt{\Delta}}$ និង

$\mu_1=\dfrac{d\sqrt{\Delta}+b_2 d+2a_2 c-a_1 d}{2\sqrt{\Delta}}$ ។

5. ប្រសិនបើ $\Delta<0$ និង $a_1+b_2\neq 0$ នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺ

$u_n=\beta^{n-1}\,[c\ \cos(n-1)\alpha\ +\ \mu\ \sin(n-1)\alpha\,]$ និង

$v_n=\beta^{n-1}\,[d\ \cos(n-1)\alpha\ +\ \mu_1\sin(n-1)\alpha\,]$

ដែល $0<\beta=\sqrt{a_1 b_2-a_2 b_1}$, $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1+b_2}\right)$, $\mu=\dfrac{a_1 c+2b_1 d-b_2 c}{\sqrt{\Delta_1}}$ និង

$\mu_1=\dfrac{b_2 d+2a_2 c-a_1 d}{\sqrt{\Delta_1}}$ ។

ករណីពិសេស

ក. ប្រសិនបើ $a_2=0$ និង $a_1-b_2\neq 0$ នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺ

$v_n=d\cdot b_2^{\ n-1}$ និង $u_n=\dfrac{a_1 c-b_2 c+b_1 d}{a_1-b_2}a_1^{\ n-1}-\dfrac{b_1 d}{a_1-b_2}\,b_2^{\ n-1}$ ។

ខ. ប្រសិនបើ $a_2=0$, $a_1-b_2=0$ និង $b_1=0$ នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺ

$v_n=d\cdot a_1^{\ n-1}$ និង $u_n=c\cdot a_1^{\ n-1}$ ។

យើងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់នូវទ្រឹស្តីបទទី១នេះដូចខាងក្រោម៖

1. ប្រសិនបើ $a_1 + b_2 = 0$ នោះ $b_2 = -a_1$ ។ យើងបាន

$$\begin{cases} u_1 = c\ ,\ v_1 = d \\ u_{n+1} = a_1 u_n + b_1 v_n \\ v_{n+1} = a_2 u_n - a_1 v_n\ ,\ n \in \mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\} \end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_1 u_{n+1} + b_1 v_{n+1} \\ &= a_1 u_{n+1} + b_1 (a_2 u_n - a_1 v_n) \\ &= a_1 u_{n+1} + a_2 b_1 u_n - a_1 (b_1 v_n) \\ &= a_1 u_{n+1} + a_2 b_1 u_n - a_1 (u_{n+1} - a_1 u_n) \\ &= a_1 u_{n+1} + a_2 b_1 u_n - a_1 u_{n+1} + a_1^2 u_n \\ &= (a_2 b_1 + a_1^2) u_n = \alpha u_n \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= a_2 u_{n+1} - a_1 v_{n+1} \\ &= a_2 (a_1 u_n + b_1 v_n) - a_1 v_{n+1} \\ &= a_1 (a_2 u_n) + a_2 b_1 v_n - a_1 v_{n+1} \\ &= a_1 (v_{n+1} + a_1 v_n) + a_2 b_1 v_n - a_1 v_{n+1} \\ &= a_1 v_{n+1} + a_1^2 v_n + a_2 b_1 v_n - a_1 v_{n+1} \\ &= (a_2 b_1 + a_1^2) v_n = \alpha v_n \end{aligned}$$

ដែល $\alpha = a_2 b_1 + a_1^2$ ។

នាំឱ្យ $u_n = \alpha\ u_{n-2}$ និង $v_n = \alpha\ v_{n-2}$ ។

- ចំពោះ $n=2k\ (k\in\mathbb{N})$ នោះ

$$u_{2k}=\alpha\ u_{2k-2}=\alpha\ (\alpha u_{2k-4})$$

$$=\alpha^2 u_{2(k-2)}=\ldots=\alpha^{k-1}u_{2[k-(k-1)]}$$

$$=\alpha^{k-1}u_2=\alpha^{k-1}(a_1u_1+b_1v_1)=\alpha^{k-1}(a_1c+b_1d)$$

និង

$$v_{2k}=\alpha\ v_{2k-2}=\ldots=\alpha^{k-1}v_2$$
$$=\alpha^{k-1}(a_2u_1-a_1v_1)=\alpha^{k-1}(a_2c-a_1d)$$ ។

- ចំពោះ $n=2k-1\,(k\in\mathbb{N})$ នោះ

$$u_{2k-1}=\alpha\ u_{2k-1-2}=\alpha\ u_{2(k-1)-1}$$

$$=\alpha(\alpha u_{2(k-1)-1-2})=\alpha^2u_{2(k-2)-1}$$

$$=\ldots=\alpha^{k-1}u_{2[k-(k-1)]-1}=\alpha^{k-1}u_1=\alpha^{k-1}c$$

និង

$$v_{2k-1}=\alpha\ v_{2k-1-2}=\ldots=\alpha^{k-1}v_1=\alpha^{k-1}d$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន

$u_{2n-1}=c\ \alpha^{n-1}$, $u_{2n}=(a_1c+b_1d)\alpha^{n-1}$, $v_{2n-1}=d\ \alpha^{n-1}$ និង $v_{2n}=(a_2c-a_1d)\ \alpha^{n-1}$

ដែល $\alpha=a_2b_1+a_1^2$ ។

2. យើងបានសមីការ

$$u_{n+1}+\theta\ v_{n+1}=r\ (u_n+\theta\ v_n)\quad(*)$$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ដោយ $u_{n+1}=a_1u_n+b_1v_n$ និង $v_{n+1}=a_2u_n+b_2v_n$ នោះសមីការ $(*)$ អាចសរសេរជា

$$a_1u_n+b_1v_n+\theta\,(a_2u_n+b_2v_n)=r\ (u_n+\theta\ v_n)$$

$$\Leftrightarrow\ (a_1+\theta a_2)u_n+(b_1+\theta b_2)v_n=ru_n+r\theta\ v_n$$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+\theta a_2 = r & (1) \\ b_1+\theta b_2 = r\theta & (2) \end{cases}$$

យើងជំនួសសមីការ (1) ចូលក្នុងសមីការ (2) នោះយើងបាន៖

$$b_1+\theta b_2 = (a_1+\theta a_2)\theta \Leftrightarrow b_1+\theta b_2 = a_1\theta+\theta^2 a_2$$

$$\Leftrightarrow a_2\theta^2+(a_1-b_2)\theta-b_1=0 \quad (*_1)$$ ។

សមីការ $(*_1)$ មាន $\Delta=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1$ ។

ប្រសិនបើ $a_2\neq 0$ និង $\Delta\geq 0$ នោះយើងអាចរកបានតម្លៃនៃ $(r\,,\,\theta)\in\mathbb{R}^2$ ពីសមីការ $(*_1)$ និង (1) ។
ដូច្នេះ ប្រសិនបើ $a_2\neq 0$ និង $\Delta\geq 0$ នោះវាមាន $(r\,,\,\theta)\in\mathbb{R}^2$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$u_{n+1}+\theta\, v_{n+1}=r\,(u_n+\theta\, v_n)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

3. ប្រសិនបើ $\Delta=0$ នោះសមីការ $(*_1)$ មាន $a_2\neq 0$ និងមានឫសឌុប មានន័យថា
$\theta_1=\theta_2=-\dfrac{a_1-b_2}{2a_2}=\dfrac{b_2-a_1}{2a_2}$ និងយើងប្រើសមីការ (1) នោះយើងបាន
$r_1=r_2=a_1+\left(\dfrac{b_2-a_1}{2a_2}\right)a_2=\dfrac{a_1+b_2}{2}$ ។

សមីការ $(*)$ ទៅជា $u_{n+1}+\theta_1\, v_{n+1}=r_1\,(u_n+\theta_1\, v_n) \Leftrightarrow x_{n+1}=r_1\,x_n \quad (*_2)$

ដែលយើងតាង $x_n=u_n+\theta_1\, v_n$ ។ ពីសមីការ $(*_2)$ នោះ (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម r_1 និងតួទី១

$$x_1=u_1+\theta_1\, v_1=c+d\left(\frac{b_2-a_1}{2a_2}\right)=\frac{2a_2\,c+b_2\,d-a_1\,d}{2a_2}$$ ។

ពីរូបមន្តនាំឱ្យ $u_n+\theta_1\, v_n=x_n=x_1r_1^{\,n-1}$ និង $u_n=-\,\theta_1\, v_n+x_1r_1^{\,n-1}$ ។

នោះ $v_{n+1}=a_2\,u_n+b_2\,v_n=a_2\,(-\,\theta_1\, v_n+x_1\,r_1^{\,n-1})+b_2\,v_n$

$$=(-a_2\,\theta_1+b_2)v_n+a_2\,x_1\,r_1^{\,n-1}=\alpha_1\,v_n+\alpha_2$$

ដែល $\alpha_1=-a_2\,\theta_1+b_2=\dfrac{a_1+b_2}{2}$ និង $\alpha_2=a_2\,x_1\,r_1^{\,n-1}$ ។

នាំឱ្យ $v_{n+1}-\alpha_1 v_n=\alpha_2 \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{\alpha_1^{\,n+1}}-\frac{v_n}{\alpha_1^{\,n}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,n+1}}$ $(\alpha_1\neq 0)$ ។

នោះ $\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{v_{k+1}}{\alpha_1^{\,k+1}}-\frac{v_k}{\alpha_1^{\,k}})=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_2\,x_1\,r_1^{\,k-1}}{\alpha_1^{\,k+1}}$

$\Leftrightarrow \frac{v_n}{\alpha_1^{\,n}}-\frac{v_1}{\alpha_1}=\frac{4\,a_2\,x_1\,(n-1)}{(a_1+b_2)^2}$ $(a_1+b_2\neq 0)$ ។

នោះ $v_n=\alpha_1^{\,n}\,[\,\frac{4\,a_2\,x_1\,(n-1)}{(a_1+b_2)^2}+\frac{v_1}{\alpha_1}\,]$

$$=\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^n\left[\frac{2\,(n-1)\,(2a_2c+b_2d-a_1d)}{(a_1+b_2)^2}+\frac{2\,d}{a_1+b_2}\right]$$

$$=[d+(n-1)\,\mu_1]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1}$$ (ពិត)

ដែល $\mu_1=\frac{2\,a_2\,c+b_2\,d-a_1\,d}{a_1+b_2}$

និង $u_n=-\,\theta_1\,v_n+x_1\,r_1^{\,n-1}=[c+(n-1)\,\mu]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1}$ (ពិត)

ដែល $\mu=\frac{a_1\,c+2\,b_1\,d-b_2\,c}{a_1+b_2}$ ។

4. ប្រសិនបើ $\Delta>0$ នោះសមីការ $(*_1)$ មាន $a_2\neq 0$ និងមានឫសចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា មានន័យថា

$\theta_1=\frac{b_2-a_1-\sqrt{\Delta}}{2\,a_2}$ ឬ $\theta_2=\frac{b_2-a_1+\sqrt{\Delta}}{2\,a_2}$ និងយើងប្រើសមីការ (1) នោះយើងបាន

$r_1=a_1+\theta_1\,a_2=\frac{a_1+b_2-\sqrt{\Delta}}{2}$ ឬ $r_2=a_1+\theta_2\,a_2=\frac{a_1+b_2+\sqrt{\Delta}}{2}$ រៀងគ្នា។

សមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\begin{cases}u_{n+1}+\theta_1\,v_{n+1}=r_1\,(u_n+\theta_1\,v_n)\\ u_{n+1}+\theta_2\,v_{n+1}=r_2\,(u_n+\theta_2\,v_n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{n+1}=r_1\,x_n & (*_3)\\ y_{n+1}=r_2\,y_n & (*_4)\end{cases}$$

ដែលយើងតាង $x_n = u_n + \theta_1\, v_n$ និង $y_n = u_n + \theta_2\, v_n$ ។ ពីសមីការ $(*_3)$ និង $(*_4)$ នាំឱ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម r_1 , r_2 និងតួទីមួយ $x_1 = u_1 + \theta_1 v_1 = c + d\left(\dfrac{b_2 - a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}\right)$,

$y_1 = u_1 + \theta_2 v_1 = c + d\left(\dfrac{b_2 - a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}\right)$ រៀងគ្នា។

ពីរូបមន្តនៃស្វ៊ីត នោះ $u_n + \theta_1\, v_n = x_n = x_1\, r_1^{\,n-1}$ $(*_5)$ និង $u_n + \theta_2\, v_n = y_n = y_1\, r_2^{\,n-1}$ $(*_6)$ ។

យើងដករវាងសមីការ $(*_5)$ និងសមីការ $(*_6)$ ផ្តល់ឱ្យ

$$(\theta_1 - \theta_2)\, v_n = x_1\, r_1^{\,n-1} - y_1\, r_2^{\,n-1} \text{ ។}$$

នោះ $v_n = \dfrac{x_1}{\theta_1 - \theta_2}\, r_1^{\,n-1} - \dfrac{y_1}{\theta_1 - \theta_2}\, r_2^{\,n-1} = \lambda_1\, r_1^{\,n-1} + \mu_1\, r_2^{\,n-1}$ (ពិត)

ដែល $\lambda_1 = \dfrac{x_1}{\theta_1 - \theta_2} = \dfrac{d\sqrt{\Delta} + a_1 d - 2a_2 c - b_2 d}{2\sqrt{\Delta}}$ និង

$\mu_1 = -\dfrac{y_1}{\theta_1 - \theta_2} = \dfrac{d\sqrt{\Delta} + b_2 d + 2a_2 c - a_1 d}{2\sqrt{\Delta}}$ ។

ពីសមីការ $(*_5)$ យើងបាន៖

$$u_n = x_1\, r_1^{\,n-1} - \theta_1\, v_n = \frac{-\theta_2\, x_1}{\theta_1 - \theta_2}\, r_1^{\,n-1} + \frac{\theta_1\, y_1}{\theta_1 - \theta_2}\, r_2^{\,n-1}$$

$$= \lambda\, r_1^{\,n-1} + \mu\, r_2^{\,n-1} \text{ (ពិត)}$$

ដែល $\lambda = \dfrac{-\theta_2\, x_1}{\theta_1 - \theta_2} = \dfrac{c\sqrt{\Delta} + b_2 c - a_1 c - 2b_1 d}{2\sqrt{\Delta}}$ និង

$\mu = \dfrac{\theta_1\, y_1}{\theta_1 - \theta_2} = \dfrac{c\sqrt{\Delta} + a_1 c + 2b_1 d - b_2 c}{2\sqrt{\Delta}}$ ។

5. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ និង យើងតាង $\Delta = -\Delta_1 = i^2\, \Delta_1$ ដែល $\Delta_1 = -(a_1 - b_2)^2 - 4a_2\, b_1$ នោះសមីការ $(*_1)$ មាន $a_2 \neq 0$ និងមានឫសចំនួនកុំផ្លិចពីរផ្លាស់គ្នា មានន័យថា

$$\theta_1 = \frac{b_2 - a_1 - i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2} = \frac{b_2 - a_1}{2a_2} - \frac{i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}$$

ឬ $\theta_2=\dfrac{b_2-a_1+i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}=\dfrac{b_2-a_1}{2a_2}+\dfrac{i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}$

និងយើងប្រើសមីការ (1) នោះយើងបាន៖

$$r_1=a_1+\theta_1 a_2=\frac{a_1+b_2}{2}-\frac{i\sqrt{\Delta_1}}{2}=\beta(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

ឬ $r_2=a_1+\theta_2 a_2=\dfrac{a_1+b_2}{2}+\dfrac{i\sqrt{\Delta_1}}{2}=\beta(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ រៀងគ្នា។

នាំឱ្យ $\beta=|r_1|=\sqrt{\left(\dfrac{a_1+b_2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-\sqrt{\Delta_1}}{2}\right)^2}=\sqrt{a_1b_2-a_2b_1}>0$,

$\tan\alpha=\dfrac{\beta\sin\alpha}{\beta\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1+b_2}$ $(a_1+b_2\neq 0)$ និង $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1+b_2}\right)$ ។

សមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\begin{cases}u_{n+1}+\theta_1\, v_{n+1}=r_1\,(u_n+\theta_1\, v_n)\\ u_{n+1}+\theta_2\, v_{n+1}=r_2\,(u_n+\theta_2\, v_n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_{n+1}=r_1 z_n & (*_7)\\ t_{n+1}=r_2 t_n & (*_8)\end{cases}$$

ដែលយើងតាង $z_n=u_n+\theta_1\, v_n$ និង $t_n=u_n+\theta_2\, v_n$ ។ ពីសមីការ $(*_7)$ និង $(*_8)$ នោះ (z_n) និង (t_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម r_1 , r_2 និងតួទីមួយ

$$z_1=u_1+\theta_1 v_1=c+d\left(\frac{b_2-a_1-i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\right)$$

$$=\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}-\frac{i\,d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2},$$

$$t_1=u_1+\theta_2 v_1=c+d\left(\frac{b_2-a_1+i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\right)$$

$=\dfrac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}+\dfrac{i\,d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}$ រៀងគ្នា។

ពីរូបមន្តនៃស្វ៊ីត នោះ $u_n+\theta_1\, v_n=z_n=z_1\, r_1^{\,n-1}$ $(*_9)$

និង $u_n+\theta_2\,v_n=t_n=t_1\,r_2^{\,n-1}\quad(*_{10})$ ។

ពីសមីការ $(*_9)$ និងប្រើរូបមន្តដឺម័រផ្តល់ឱ្យ

$$u_n+\left(\frac{b_2-a_1}{2a_2}-\frac{i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\right)v_n=\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}-\frac{id\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\right)\beta^{n-1}\left(\cos(n-1)\alpha-i\sin(n-1)\alpha\right)$$ ។

នោះ $$u_n+\frac{b_2-a_1}{2a_2}v_n-\frac{i\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}v_n=\beta^{n-1}\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}\cos(n-1)\alpha-\frac{d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\sin(n-1)\alpha\right)$$

$$-i\,\beta^{n-1}\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}\sin(n-1)\alpha+\frac{d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\cos(n-1)\alpha\right)$$ ។

នាំឱ្យ $$v_n=\beta^{n-1}\frac{2a_2}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}\sin(n-1)\alpha+\frac{d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\cos(n-1)\alpha\right)$$

$$=\beta^{n-1}\left[d\,\cos(n-1)\alpha+\mu_1\sin(n-1)\alpha\right]\quad(\text{ពិត})$$

ដែល $\mu_1=\dfrac{b_2\,d+2\,a_2\,c-a_1\,d}{\sqrt{\Delta_1}}$

និង $$u_n+\frac{b_2-a_1}{2a_2}v_n=\beta^{n-1}\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}\cos(n-1)\alpha-\frac{d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\sin(n-1)\alpha\right)$$ ។

ដូចនេះ $$u_n=\beta^{n-1}\left(\frac{2a_2c+b_2d-a_1d}{2a_2}\cos(n-1)\alpha-\frac{d\sqrt{\Delta_1}}{2a_2}\sin(n-1)\alpha\right)-\frac{b_2-a_1}{2a_2}v_n$$

$$=\beta^{n-1}\left[c\,\cos(n-1)\alpha+\mu\,\sin(n-1)\alpha\right]\quad(\text{ពិត})$$

ដែល $\mu=\dfrac{a_1\,c+2\,b_1\,d-b_2\,c}{\sqrt{\Delta_1}}$ ។

ករណីពិសេស

ក. ប្រសិនបើ $a_2=0$ និង $a_1-b_2\neq 0$ នោះសមីការ (1) និង (2) ទៅជា

$r=a_1$ និង $b_1+\theta\,b_2=a_1\,\theta$ ។

នោះ $r=a_1$ និង $\theta=\dfrac{b_1}{a_1-b_2}\quad(a_1-b_2\neq 0)$ ។

សមីការ $(*)$ ទៅជា $w_{n+1}=r\,w_n\quad(*_{11})$

ដែលយើងតាង $w_n = u_n + \theta\, v_n$ ។ ពីសមីការ $(*_{11})$ នោះ (w_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម r និងតួទីមួយ

$$w_1 = u_1 + \theta\, v_1 = c + \left(\frac{b_1}{a_1 - b_2}\right) d = \frac{a_1 c - b_2 c + b_1 d}{a_1 - b_2}$$ ។

ពីរូបមន្ត នោះ $u_n + \theta\, v_n = w_n = w_1 r^{n-1}$ និង $u_n = w_1 r^{n-1} - \theta\, v_n$ ។

ដោយ $a_2 = 0$ នោះ $v_{n+1} = b_2 v_n$ ។

ដូច្នេះ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម b_2 និង តួទីមួយ $v_1 = d$ ។

នោះ $v_n = v_1 b_2^{\,n-1} = d \cdot b_2^{\,n-1}$ (ពិត) និង

$$u_n = w_1 r^{n-1} - \theta\, v_n = \frac{a_1 c - b_2 c + b_1 d}{a_1 - b_2} a_1^{\,n-1} - \frac{b_1 d}{a_1 - b_2} b_2^{\,n-1}$$ (ពិត) ។

ខ. ប្រសិនបើ $a_2 = 0$, $a_1 - b_2 = 0$ និង $b_1 = 0$ នោះសមីការដើមនៃស្ទីតអាចសរសេរជា

$$\begin{cases} u_1 = c\ ,\ v_1 = d \\ u_{n+1} = a_1 u_n \\ v_{n+1} = b_2 v_n = a_1 v_n\ ,\ n \in \mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\} \end{cases}$$

តាមការប្រើដំណោះស្រាយស្រដៀងគ្នា យើងបាន៖

$u_n = u_1 \cdot a_1^{\,n-1} = c \cdot a_1^{\,n-1}$ និង $v_n = v_1 \cdot a_1^{\,n-1} = d \cdot a_1^{\,n-1}$ (ពិត) ។

៤. ការអនុវត្តរូបមន្តស្ទីតស្ទី

ឥឡូវនេះ យើងអនុវត្តដោះស្រាយបញ្ហាប្រព័ន្ធស្ទីត (I) មួយចំនួនដោយប្រើរូបមន្តទាំងឡាយក្នុងទ្រឹស្តីបទទី១នៅផ្នែកទី៣។

1. គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិតពីរ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = 2\ ,\ v_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n + 6v_n \\ v_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n - 4v_n\ ,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

រក u_{2n-1} , u_{2n} , v_{2n-1} និង v_{2n} ជាអនុគមន៍នៃ n ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងមាន $c=2$, $d=-3$, $a_1=4$, $b_1=6$, $a_2=\sqrt{3}$ និង $b_2=-4$ ។

ដោយ $a_1+b_2=0$ នោះតាមរូបមន្ត យើងបាន៖

$$u_{2n-1}=c\,(a_2\,b_1+a_1{}^2)^{n-1}=2(6\sqrt{3}+16)^{n-1}$$

$$u_{2n}=(a_1\,c+b_1\,d)(a_2\,b_1+a_1{}^2)^{n-1}=-10(6\sqrt{3}+16)^{n-1}$$

$$v_{2n-1}=d\,(a_2\,b_1+a_1{}^2)^{n-1}=-3(6\sqrt{3}+16)^{n-1}$$

និង

$$v_{2n}=(a_2\,c-a_1\,d)\,(a_2\,b_1+a_1{}^2)^{n-1}=(2\sqrt{3}+12)\,(6\sqrt{3}+16)^{n-1}$$ ។

2. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1=2\ ,\ v_1=-3 \\ u_{n+1}=3u_n-v_n \\ v_{n+1}=u_n+v_n\ ,\ n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\} \end{cases}$$

គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងមាន $c=2$, $d=-3$, $a_1=3$, $b_1=-1$, $a_2=1$ និង $b_2=1$ ។

នាំឱ្យ $\Delta=(a_1-b_2)^2+4a_2\,b_1=(3-1)^2+4(1)(-1)=0$

$$\mu=\frac{a_1\,c+2b_1\,d-b_2\,c}{a_1+b_2}=\frac{3(2)+2(-1)(-3)-(1)(2)}{3+1}=\frac{5}{2}$$

និង

$$\mu_1=\frac{2a_2\,c+b_2\,d-a_1\,d}{a_1+b_2}=\frac{2(1)(2)+(1)(-3)-(3)(-3)}{3+1}=\frac{5}{2}$$ ។

ដោយ $\Delta=0$ និង $a_1+b_2=4\neq0$ នោះតាមរូបមន្ត យើងបាន៖

$$u_n=[c+(n-1)\mu]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1}$$

$$=[2+(n-1)\frac{5}{2}]\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1}=(5n-1)\,2^{n-2}$$

និង

$$v_n = [d + (n-1)\mu_1]\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^{n-1}$$

$$= [-3 + (n-1)\frac{5}{2}]\left(\frac{4}{2}\right)^{n-1} = (5n-11)2^{n-2} \text{ ។}$$

3. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយៈ

$$\begin{cases} u_1 = 3 \, , \, v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{8}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{7}{3}v_n \, , \, n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\} \end{cases}$$

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅៈ

យើងមាន $c = 3$, $d = 1$, $a_1 = \frac{8}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ និង $b_2 = \frac{7}{3}$ ។

នាំឱ្យ $\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = \left(\frac{8}{3} - \frac{7}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1$

$$r_1 = \frac{a_1 + b_2 - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{7}{3} - \sqrt{1}}{2} = 2$$

$$r_2 = \frac{a_1 + b_2 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{7}{3} + \sqrt{1}}{2} = 3$$

$$\lambda = \frac{c\sqrt{\Delta} + b_2 c - a_1 c - 2b_1 d}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{3\sqrt{1} + \frac{7}{3}(3) - \frac{8}{3}(3) - 2\cdot\frac{2}{3}(1)}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{3}$$

$$\mu = \frac{c\sqrt{\Delta} + a_1 c + 2b_1 d - b_2 c}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{3\sqrt{1} + \frac{8}{3}(3) + 2\cdot\frac{2}{3}(1) - \frac{7}{3}(3)}{2\sqrt{1}} = \frac{8}{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{d\sqrt{\Delta} + a_1 d - 2a_2 c - b_2 d}{2\sqrt{\Delta}} = -\frac{1}{3}$$

និង

$$\mu_1 = \frac{d\sqrt{\Delta} + b_2 d + 2a_2 c - a_1 d}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{4}{3} \text{ ។}$$

ដោយ $\Delta = 1 > 0$ នោះតាមរូបមន្ត យើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) គឺ

$$u_n = \lambda\, r_1^{\,n-1} + \mu\, r_2^{\,n-1} = \frac{1}{3}\, 2^{n-1} + \frac{8}{3}\, 3^{n-1}$$

និង

$$v_n = \lambda_1\, r_1^{\,n-1} + \mu_1\, r_2^{\,n-1} = -\frac{1}{3}\, 2^{n-1} + \frac{4}{3}\, 3^{n-1} \text{ ។}$$

4. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = 2\,,\; v_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3\,u_n + v_n \\ v_{n+1} = -5\,u_n - v_n\;,\; n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \end{cases}$$

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតទាំងពីរ។

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងមាន $c = 2$, $d = -1$, $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $a_2 = -5$ និង $b_2 = -1$ ។

នាំឱ្យ $\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4\,a_2\,b_1 = (3+1)^2 + 4(-5)(1) = -4$

$\Delta_1 = -\Delta = 4$

$$\beta = \sqrt{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} = \sqrt{3(-1) - (-5)(1)} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1 + b_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4}}{3-1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mu = \frac{a_1\,c + 2\,b_1\,d - b_2\,c}{\sqrt{\Delta_1}} = \frac{3(2) + 2(1)(-1) - (-1)(2)}{\sqrt{4}} = 3$$

និង

$$\mu_1 = \frac{b_2\,d + 2\,a_2\,c - a_1\,d}{\sqrt{\Delta_1}} = \frac{(-1)(-1) + 2(-5)(2) - (3)(-1)}{\sqrt{4}} = -8 \text{ ។}$$

ដោយ $\Delta = -4 < 0$ និង $a_1 + b_2 = 2 \neq 0$ នោះតាមរូបមន្ត យើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) គឺ

$$u_n = \beta^{n-1}[\,c\cos(n-1)\alpha + \mu\sin(n-1)\alpha\,] = (\sqrt{2}\,)^{n-1}[\,2\cos(n-1)\frac{\pi}{4} + 3\sin(n-1)\frac{\pi}{4}\,]$$

និង

$$v_n = \beta^{n-1}[\,d\cos(n-1)\alpha + \mu_1\sin(n-1)\alpha\,] = (\sqrt{2}\,)^{n-1}[\,-\cos(n-1)\frac{\pi}{4} - 8\sin(n-1)\frac{\pi}{4}\,] \text{ ។}$$

សរុបមក អត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ នឹងផ្តល់នូវចំណេះដឹងអំពី ស្វ៊ីត ដូចជា និយមន័យនៃស្វ៊ីត រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីត ស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែលំដាប់ទី k និង វិធីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការស្វ៊ីតក្នុងទម្រង់មួយ ។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា លោកអ្នកអាន និង អ្នកស្រាវជ្រាវនឹងបានឃើញថា ការប្រើប្រាស់រូបមន្តស្វ៊ីតនៃទ្រឹស្តីបទទី១នេះ ពិតជាមានភាពងាយស្រួលជាងក្នុងការកំណត់រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតក្នុងប្រព័ន្ធស្វ៊ីត (I) (ការអនុវត្តរូបមន្តស្វ៊ីតក្នុងផ្នែក៤) ហើយរូបមន្តទាំងនេះនឹងផ្តល់វិភាគទានដល់អ្នកសិក្សា និង អ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយយកទៅប្រើប្រាស់សម្រាប់បញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងប្រព័ន្ធស្វ៊ីត (I) ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យា និង មានគំនិតរៀបរៀងទ្រឹស្តី ឬ រូបមន្តថ្មីៗជាបន្តទៀត។

ឯកសារពិគ្រោះ

១. https://byjus.com/maths/sequence-and-series/

២. https://courses.lumenlearning.com/boundless-algebra/chapter/sequences-and-series/

៣. https://www.britannica.com/science/harmonic-sequence-mathematics

៤. https://en.wikipedia.org/wiki/Sequence

៥. https://math.temple.edu/~reich/Fib/fibo.html

៦. https://www.mathsisfun.com/numberpatterns.html

៧. https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

៨. https://www.aplustopper.com/harmonic-progression-mathematics/

៩. https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_progression_%28mathematics%29

១០. http://www.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/cs310-04w/notes/dm-recurrences.pdf

១១. http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-apgp-2009-1.pdf

១២. http://www.math.usu.edu/rheal/online1050/Precalculus/Section_8.3.pdf

១៣. https://www.mathsisfun.com/numbers/fibonacci-sequence.html

១៤. https://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation