រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ROYAL ACADEMY OF CAMBODIA

វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួន ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ

(Study of Some Integral Types In Mathematics and Science)

សិក្សារៀបរៀងដោយ យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ភ្នំពេញ ២០១៦

សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួន ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ

(Study of Some Integral Types In Mathematics and Science)

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ
បណ្ឌិត អ៊ាប បុណ្ណា
បណ្ឌិត ហាក់ ធីរោ

សិក្សារៀបរៀង
យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

រក្សាសិទ្ធដោយរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា
ធ្វើនៅភ្នំពេញ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ទីស្ដីការគណៈរដ្ឋមន្ត្រី
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

Royal Academy of Cambodia
Académie Royale du Cambodge

បុព្វកថា

សៀវភៅស្ដីពី « សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ » នេះ ជាសៀវភៅដែលលោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** បានធ្វើការស្រាវជ្រាវ បកប្រែ ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលតាមប្រភេទ រៀបរៀងនិងចងក្រងឡើង ដើម្បីទុកជាស្នាដៃថ្មីមួយទៀតសម្រាប់សិស្ស និស្សិតនិងអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។

កន្លងមកស្នាដៃស្រាវជ្រាវដែលត្រូវបានបោះពុម្ពជាភាសាខ្មែរដែលទាក់ទងទៅនឹងការយល់ដឹងអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយវាគឺមានតិចតួចណាស់។

ដូចនេះ សៀវភៅស្ដីពី « សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ » ជាស្នាដៃថ្មីមួយដែលមានសារៈប្រយោជន៍ឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការជាចាំបាច់ខាងលើនេះ។ ខ្លឹមសារនៃសៀវភៅនេះបានបង្ហាញជូនលោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវនូវវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទៅតាមប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួននិងរបៀបប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំងតេក្រាល។ ខ្ញុំសង្ឃឹមថា លោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវចេះគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងកំណត់ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំងតេក្រាលទាំងនេះទៅជាភាពងាយស្រួល។ ជាងនេះទៅទៀត ខ្ញុំសង្ឃឹមថាលោក **យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** ប្រាកដជាខិតខំស្រាវជ្រាវបន្តទៀត ដើម្បីចែករំលែកបទពិសោធន៍និងចំណេះដឹងដល់យើងទាំងអស់គ្នានិងអ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយ។

ជាមួយគ្នានេះ ក្នុងនាមរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា នាងខ្ញុំសូមគោរពថ្លែងអំណរគុណចំពោះ សម្ដេចតេជោបណ្ឌិតសភាចារ្យ ហ៊ុន សែន នាយករដ្ឋមន្ត្រីនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា និង ឯកឧត្ដមបណ្ឌិតសភាចារ្យ សុខ អាន ឧបនាយករដ្ឋមន្ត្រី រដ្ឋមន្ត្រីទទួលបន្ទុកទីស្ដីការគណៈរដ្ឋមន្ត្រី ដែលតែងតែគាំទ្រដល់បេសកកម្មរបស់រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ចំពោះកិច្ចការស្រាវជ្រាវនិងការបោះពុម្ពផ្សាយ។

រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី០៦ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦

ប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ខួន ធីតា

អាសយដ្ឋាន៖ មហាវិថីសហព័ន្ធរុស្ស៊ី សង្កាត់កាកាប ខណ្ឌពោធិ៍សែនជ័យ រាជធានីភ្នំពេញ - ប្រអប់សំបុត្រលេខ៥៣១ ភ្នំពេញ កម្ពុជា
Tel/Fax: (855) 23 890 180, Website: www.rac-academy.edu.kh, E-mail: info@rac-academy.edu.kh, P.O.Box 531 Phnom Penh, Cambodia

ចំណាប់អារម្មណ៍
របស់ឯកឧត្តមបណ្ឌិត អ៊ាប បុណ្ណា

ខ្ញុំមានសេចក្ដីសោមនស្សរីករាយដោយបានឃើញនូវខ្លឹមសារនៃសៀវភៅស្ដីពី << សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ >> របស់លោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ដែលជាអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិនៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា។

សៀវភៅនេះ ជាស្នាដៃថ្មីមួយដែលមានប្រយោជន៍សម្រាប់សិស្ស និស្សិតនិងអ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ខ្លឹមសារនៃសៀវភៅនេះបានបង្ហាញជូនលោកអ្នកអាននិងអ្នកស្រាវជ្រាវនូវវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទៅតាមប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួននិងរបៀបប្រើប្រាស់រូបមន្តអាំងតេក្រាល។ ជាងនេះទៅទៀត ខ្ញុំសង្ឃឹមថាលោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ប្រាកដជាខិតខំស្រាវជ្រាវបន្តទៅទៀត ដើម្បីចែករំលែកបទពិសោធន៍និងចំណេះដឹងដល់យើងទាំងអស់គ្នានិងអ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយបន្ថែមទៀត។

ជាមួយនឹងវិភាគទានដ៏ថ្លៃថ្លាក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យារបស់លោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះបានផ្ដល់ចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្ដីនិងគណនាក្នុងការអភិវឌ្ឍវិស័យវិទ្យាសាស្ត្របថែមទៀត។

រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី០៥ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦

ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

បណ្ឌិត.អ៊ាប_បុណ្ណា

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិត **អ៊ាប បុណ្ណា** ប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា និង បណ្ឌិត **ហាក់ ធីរោ** អនុប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យាដែលបានជួយត្រួតពិនិត្យ កែសម្រួលនិងអនុម័តស្នាដៃនេះឱ្យបានចេញជារូបរាងឡើង។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណជាពន្លឹកចំពោះបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ខួត ធីតា** ប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា បណ្ឌិតសភាចារ្យ **ស៊ុំ ឈុំប៊ុន** អនុប្រធានរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ឯកឧត្តម **លី សុធីរ័ត្ន** អគ្គលេខាធិការនៃរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា និងសហការីទាំងអស់ដែលបានជួយរៀបចំកិច្ចការរដ្ឋបាលនិងហិរញ្ញវត្ថុសម្រាប់ស្នាដៃនេះ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះសាស្ត្រាចារ្យ បណ្ឌិតនិងទស្សនវិទូគណិតវិទ្យាទាំងឡាយដែលបានខិតខំស្រាវជ្រាវទ្រឹស្ដីឬរូបមន្តគណិតវិទ្យា ហើយបានចងក្រងជាសៀវភៅយ៉ាងច្រើនទុកឯកសារស្រាវជ្រាវដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយ។

អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវ

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

តំណាងផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

មាតិកា

ទំព័រ

អារម្ភកថា

លោកអ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាអាចដឹងហើយថា អាំងតេក្រាលជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលមានការស្មុគស្មាញទាំងទ្រឹស្តីនិងគណនាដល់អ្នកសិក្សាវា ប៉ុន្តែផ្នែកមួយនេះគេមិនអាចដកវាចេញបានឡើយសម្រាប់អ្នកសិក្សានិងស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ម្យ៉ាងទៀត នៅក្នុងប្រទេសកម្ពុជា ឯកសារឬសៀវភៅដែលត្រូវបានបោះពុម្ពជាភាសាខ្មែរហើយដែលទាក់ទងទៅនឹងការយល់ដឹងអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយវាគឺមានតិចតួចបំផុត។

ដោយសារមូលហេតុនេះហើយទើបខ្ញុំបានកំណត់យកប្រធានបទមួយមកបកស្រាយគឺ « **សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ** »។ សៀវភៅនេះត្រូវបានស្រាវជ្រាវ បកប្រែ ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលតាមប្រភេទនិងរៀបរៀងឡើង ដើម្បីទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវនិងជាចំណេះដឹងមួយសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និង អ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងប្រធានបទនេះ។

សៀវភៅនេះរួមមាន៨ជំពូក។ ជំពូកទី១សិក្សាអំពីទ្រឹស្តីទាក់ទង ជំពូកទី២សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន ជំពូកទី៣សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន ជំពូកទី៤សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជំពូកទី៥សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត ជំពូកទី៦សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ ជំពូកទី៧សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ និងជំពូកទី៨សិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក។

សរុបសេចក្តីមក ខ្ញុំសង្ឃឹមនិងជឿជាក់ថា មិត្តអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាពិតជាទទួលបាននូវផលប្រយោជន៍និងជោគជ័យក្នុងកិច្ចការសិក្សាជាមិនខានពីសៀវភៅនេះ។

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ថ្ងៃទី០៧ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៦

អ្នកសិក្សារៀបរៀង

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

គណៈផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

សេចក្តីផ្តើម

បច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យាកាន់តែរីកចម្រើនទៅមុខឥតឈប់ឈរមែនក៏នៅតែពឹងផ្អែកលើរូបមន្តឬវិធីសាស្ត្រនានានៃជំនាញគណិតវិទ្យា។ ក្នុងគណិតវិទ្យាមានប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រជាច្រើន ប៉ុន្តែខ្ញុំលើកយកតែប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រគណនាមួយផ្នែកប៉ុណ្ណោះក្នុងគណិតវិទ្យាគណនាមកសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងរៀបរៀង។ ម្យ៉ាងទៀត សិស្សនិងនិស្សិតភាគច្រើននៅក្នុងប្រទេសយើងចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យាគណនាជាងខាងទ្រឹស្តី ហេតុនេះ ខ្ញុំនឹងលើកយកប្រធានបទមួយស្តីអំពី << **សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ** >>។ តើគេមានប្រភេទអាំងតេក្រាលអ្វីខ្លះដែលអាចគណនាបាន? តើគេអាចដោះស្រាយប្រភេទអាំងតេក្រាលទាំងនេះតាមវិធីសាស្ត្រណា? ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងសំណួរទាំងពីរនេះ ខ្ញុំនឹងបង្ហាញនៅក្នុងជំពូកទី២ ទីបីនិងបន្តបន្ទាប់។ ជាដំបូង យើងនឹងសិក្សាទ្រឹស្តីដែលទាក់ទងនឹងប្រធានបទរបស់យើងក្នុងជំពូកទី១មុនសិនស្តីអំពីទ្រឹស្តីទាក់ទង។

ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តីទាក់ទង

(Related Theories)

នៅក្នុងជំពូកទី១នេះ យើងនឹងសិក្សានូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាល ហើយបន្ទាប់មក យើងនឹងសិក្សារូបមន្ត លក្ខណៈ និងវិធីខ្លះៗនៃការគណនាអាំងតេក្រាលដូចតទៅៈ

១.១ ព្រីមីទីវ

១.១.១ និយមន័យ

អនុគមន៍ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h(x)$ កាលណា $H'(x) = h(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $h(x)$ ។[១]

ឧទាហរណ៍ទី១ គេមានអនុគមន៍ $G(x) = 2x^3 - 8e^x$ និង $H(x) = 2x^3 - 8e^x + 2016$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$។ តើ $G(x)$ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x) = 6x^2 - 8e^x$ ឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = 2x^3 - 8e^x$ និង $H(x) = 2x^3 - 8e^x + 2016$ នាំឱ្យ

$G'(x) = 6x^2 - 8e^x = g(x)$ និង $H'(x) = 6x^2 - 8e^x = g(x)$ ។

ដូចនេះ $G(x)$ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេមាន $F(x) = x^5\left(3e^x + 2\right)$ និង $f(x) = x^4\left(15e^x + 10 + 3xe^x\right)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $F(x) = x^5\left(3e^x + 2\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^5)'(3e^x + 2) + x^5(3e^x + 2)' \\ &= 5x^4(3e^x + 2) + x^5(3e^x) \\ &= 15x^4e^x + 10x^4 + 3x^5e^x = x^4\left(15e^x + 10 + 3xe^x\right) = f(x) \end{aligned}$$

---

[១] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* ” ទំព័រទី៩ ឆ្នាំ១៩៩៧

$$= x^4\left(15e^x + 10 + 3xe^x\right) = f(x)$$ ។

ដោយ $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គេមាន $G(x) = xe^{-3x^2}$ និង $g(x) = \left(1-6x^2\right)e^{-3x^2}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = xe^{-3x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ $G'(x) = (x)'e^{-3x^2} + x(e^{-3x^2})'$

$$= (1)e^{-3x^2} + x(-3x^2)'e^{-3x^2}$$

$$= e^{-3x^2} + x(-6x)e^{-3x^2}$$

$$= \left(1-6x^2\right)e^{-3x^2} = g(x)$$ ។

ដោយ $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ ។

១.១.២ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $h(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $h(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $H(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $(H(x)+c)' = H'(x) = h(x)$ ពីព្រោះ c ជាចំនួនពិតថេរ និង $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x)$ នាំឱ្យព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $h(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $H(x)+c$ (ពិត)។

១.២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១.២.១ និយមន័យ

គេមាន $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h(x)$ ។ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $h(x)$ កំណត់ដោយ $\int h(x)\,dx = H(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

១.២.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

យើងមានរូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់សំខាន់ៗគឺ៖[២]

[២] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា " *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* " ទំព័រទី១០ ឆ្នាំ១៩៩៧

១. $\int [g(x) \pm h(x)]\, dx = \int g(x)\, dx \pm \int h(x)\, dx$

២. $\int \alpha g(x)\, dx = \alpha \int g(x)\, dx\ ;\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាអាំងតេក្រាលៈ $\int \lambda\, dx$, $\int x^{\lambda}\, dx$, $\int e^{x} dx$, $\int b^{x} dx$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ និង $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ ដែល $\lambda \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1,\ a \neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានៈ

. $(\lambda x + c)' = \lambda$ នាំឱ្យ $\int \lambda\, dx = \lambda x + c$ ។

. $\left(\frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + c\right)' = \frac{\lambda+1}{\lambda+1} x^{(\lambda+1)-1} = x^{\lambda}, \lambda \neq -1$

និង $\left(\ln|x| + c\right)' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \lambda = -1, x \neq 0$

នាំឱ្យ $\int x^{\lambda}\, dx = \frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + c\ , \lambda \neq -1$

និងចំពោះ $\lambda = -1,\ \int x^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ។

. $(e^{x} + c)' = e^{x}$ នាំឱ្យ $\int e^{x} dx = e^{x} + c$ ។

. $\left(\frac{b^{x}}{\ln b} + c\right)' = \frac{b^{x} \ln b}{\ln b} = b^{x}$ នាំឱ្យ $\int b^{x} dx = \frac{b^{x}}{\ln b} + c$ ។

. $\left(\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c\right)' = \left(\frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + c\right)'$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x+a} = \frac{x+a-x+a}{2a(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{2a}{2a(x^2 - a^2)} = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ ។

$$\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c\right)' = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{a\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$ ។

១.២.៣ រូបមន្តងាយនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ពីឧទាហរណ៍ទី៤ យើងបានរូបមន្តងាយៗមួយចំនួននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដូចតទៅ៖

១. $\int \lambda\, dx = \lambda x + c \qquad (1.1)$

២. $\int x^{\lambda}\, dx = \frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1}+c,\ \lambda \neq -1 \qquad (1.2)$

៣. $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c \qquad (1.3)$

៤. $\int e^{x}dx = e^{x}+c \qquad (1.4)$

៥. $\int b^{x}dx = \frac{b^{x}}{\ln b}+c\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1 \qquad (1.5)$

៦. $\int \frac{dx}{x^2-b^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right|+c \qquad (1.6)$

៧. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c\ ,\ a\neq 0 \qquad (1.7)$

យើងក៏អាចកំណត់បាននូវរូបមន្តដទៃទៀតដូចជា៖[៣]

៨. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\ dx = -\frac{1}{x}+c \qquad (1.8)$

៩. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad (1.9)$

[៣] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* ” ទំព័រទី១១ ឆ្នាំ១៩៩៧

១០. $\int \cos x \, \mathrm{dx} = \sin x + \mathrm{c}$ (1.10)

១១. $\int \dfrac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \tan x + c$ (1.11)

១២. $\int \dfrac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\cot x + c$ (1.12)

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\int(-7x^7 - 4x^4 + 2x^2 - 9)\,\mathrm{dx}$, $\int \dfrac{3x^2 + 2x + 5}{x}\,\mathrm{dx}$ និង $\int(7\mathrm{e}^x - 8\cdot 5^x + 2\mathrm{x}^3)\,\mathrm{dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងបាន៖

$$\int(-7x^7 - 4x^4 + 2x^2 - 9)\,\mathrm{dx} = -7\int x^7\,\mathrm{dx} - 4\int x^4\,\mathrm{dx} + 2\int x^2\,\mathrm{dx} - \int 9\,\mathrm{dx}$$

$$= -7\cdot\frac{x^{7+1}}{7+1} - 4\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} + 2\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} - 9x + c$$

$$= -\frac{7x^8}{8} - \frac{4x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - 9x + c$$

$$\int\frac{3x^2 + 2x + 5}{x}\,\mathrm{dx} = \int\left(\frac{3x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x = \int\left(3x + 2 + \frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 3\int x\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x + 5\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{3x^2}{2} + 2x + 5\ln|x| + c$$

និង $\int(7\mathrm{e}^x - 8\cdot 5^x + 2\mathrm{x}^3)\,\mathrm{dx} = 7\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - 8\int 5^x\,\mathrm{d}x + 2\int x^3\,\mathrm{d}x$

$$= 7e^x - 8\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + 2\cdot\frac{x^4}{4} + c$$

$$= 7e^x - \frac{8}{\ln 5}5^x + \frac{x^4}{2} + c$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int\dfrac{\mathrm{dy}}{y^2 - 25}$ និង $\int\dfrac{\mathrm{dy}}{y^2 + 2018}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងបាន៖

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{y^2-25} = \int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}^2-5^2} = \frac{1}{2(5)}\ln\left|\frac{y-5}{y+5}\right| + c = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{y-5}{y+5}\right| + c$$

និង $\int \frac{\mathrm{dy}}{y^2+2018} = \int \frac{\mathrm{dy}}{y^2+(\sqrt{2018})^2} = \frac{1}{\sqrt{2018}}\tan^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2018}}\right) + c$ ។

១.៣ អាំងតេក្រាលកំណត់

១.៣.១ និយមន័យ

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = g(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $[a, b]$។ ចែកចន្លោះ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះដោយចំណុច $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ ។ នៅលើចន្លោះនីមួយៗ $[x_{i-1}, x_i]$ គេជ្រើសរើសយកចំណុច ξ_i ហើយគេរកប្រវែងនៃចន្លោះនោះ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ។ នាំឱ្យផលបូកអាំងតេក្រាលនៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ជាផលបូកមានរាង៖

$$S_n = g(\xi_1)\Delta x_1 + g(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + g(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \text{ ។}$$

អាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ជាលីមីតនៃផលបូកអាំងតេក្រាលដោយមានលក្ខខណ្ឌប្រវែងដែលធំបំផុតក្នុងចន្លោះខិតទៅរកសូន្យ គឺថា

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

ដែល $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ ។

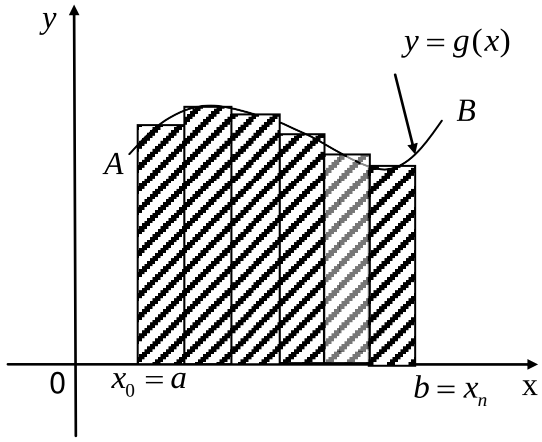
បើ S_n មានលីមីតកំណត់ S មិនទាក់ទងនឹងការចែកអង្កត់និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i នោះគេថា S ជាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ហើយគេសរសេរជា

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} S_n = S \quad (1.13)$$ ។[៤]

គេថា $g(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a, b]$។ អាំងតេក្រាល $\int_a^b g(x)\,dx$ ទាក់ទងតែអនុគមន៍ $g(x)$ និងគោល a, b ហើយមិនទាក់ទងនឹងអថេរអាំងតេក្រាលទេគឺ

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(t)dt \text{ ។}$$

[៤] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលកំណត់* ” ទំព័រទី១ ឆ្នាំ១៩៩៧



យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមនិយមន័យដែលបានបង្ហាញនូវឧទាហរណ៍ទី៧ ទី៨និងទី៩ដូចតទៅ៖

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_3^6 25dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 25$ ជាប់លើ $[3, 6]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះនោះ។ ចែកចន្លោះ $[3, 6]$ ជា n ចន្លោះស្មើៗគ្នាដោយចំណុច $x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} = 3 + i\cdot\frac{6-3}{n} = 3 + i\cdot\frac{3}{n}$ និង $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$ ហើយជ្រើសរើសចំណុច ξ_i លើចន្លោះ $[x_{i-1}, x_i]$ ដែល $\xi_i = x_i$ នាំឱ្យ $\mathrm{g}(\xi_i) = 25$ យើងបាន៖

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = 25\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 25\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n} = 25\cdot\frac{3}{n}\cdot n = 75$$

និង $\int_3^6 25dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = 75$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_0^1 -5x^2dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = -5x^2$ ជាប់លើ $[0, 1]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើ $[0, 1]$។

នាំឱ្យ $\int_0^1 -5x^2dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ ដែល $d = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$ ។ ក្នុងនោះលីមីតមានដោយមិនទាក់ទងនឹងការចែកចន្លោះ $[0, 1]$ និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i ទេ។ គេចែកចន្លោះ $[0, 1]$ ជា n ចន្លោះតូចៗស្មើគ្នានិងជ្រើសរើស $\xi_i = x_i$, $i\in\{1, 2, ..., n\}$ ។ គេបាន៖

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$; $i \in \{1, 2, ..., n\}$; $\xi_i = x_i = \frac{i}{n} \Rightarrow g(\xi_i) = -5\xi_i^{\,2} = \frac{-5i^2}{n^2}$ និង

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{-5i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{5}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{5}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -\frac{5(n+1)(2n+1)}{6n^2} = -\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \text{ ។}$$

ដោយចែកជាចន្លោះស្មើៗគ្នា នាំឱ្យ $\Delta x_i \to 0$ នោះ $n \to +\infty$ និង

$$\int_0^1 -5x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{5}{6}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{5}{6}(1+0)(2+0) = -\frac{5}{3} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int_a^b e^x\,dx \quad (0<a<b)$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $g(x) = e^x$ ជាប់លើ $[a, b]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើ $[a, b]$ ។

នាំឱ្យ $\int_a^b e^x\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ ដែល $d = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$ ។ ក្នុងនោះលីមីតមានដោយមិនទាក់ទង នឹងការចែកចន្លោះ $[a, b]$ និងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i ទេ។ គេចែកចន្លោះ $[a, b]$ ជា n ចន្លោះតូចៗស្មើគ្នានិងជ្រើសរើស $\xi_i = x_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ។

គេបាន៖ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$; $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

$$\xi_i = x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} \Rightarrow g(\xi_i) = e^{\xi_i} = e^{a+i\cdot\frac{b-a}{n}}$$

និង $S_n = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+i\cdot\frac{b-a}{n}}\cdot\frac{b-a}{n}$

$$= \frac{(b-a)e^a}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{i\cdot\frac{b-a}{n}} = \frac{(b-a)e^a}{n}\cdot e^{\frac{b-a}{n}}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$$=\frac{(b-a)\left(e^a-e^b\right)}{n}\cdot\frac{e^{\frac{b-a}{n}}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}=\left(e^b-e^a\right)e^{\frac{b-a}{n}}\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$$ ។

ដោយចែកជាចន្លោះស្មើៗគ្នា នាំឱ្យ $\Delta x_i \to 0$ នោះ $n\to+\infty$ និង

$$\int_a^b e^x\,dx=\lim_{n\to+\infty}S_n=\left(e^b-e^a\right)\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{b-a}{n}}\cdot\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}=e^b-e^a$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{b-a}{n}}=e^0=1$ និងតាង $x=\dfrac{b-a}{n}$ នាំឱ្យ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$ ។

១.៣.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់[៥]

គេឱ្យ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបាន៖

១. $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\ \pm\int_a^b g(x)dx$ (1.14)

២. $\int_a^b\lambda\,g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx\ ;\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$ (1.15)

៣. $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^c g(x)\,dx+\int_c^b g(x)\,dx\ ;\ a<c<b$ (1.16)

៤. $\int_a^a g(x)\,dx=0$ (1.17)

៥. $\int_a^b g(x)dx=-\int_b^a g(x)dx$ (1.18)

៦. បើ $g(x)\ge0$ លើ $[a,b]$ នោះគេបាន $\int_a^b g(x)\,dx\ge0$ (1.19)

[៥] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលកំណត់* ” ទំព័រទី២និងទី៣ ឆ្នាំ១៩៩៧

វិបាក

៧. ចំពោះ $\forall x\in[a,b];\ g(x)\le f(x)$ នាំឱ្យ $\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$ (1.20)

៨. $\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |g(x)|\,dx$ (1.21)

ឧទាហរណ៍ទី១០ ចូរប្រៀបធៀបអាំងតេក្រាល $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ និង $\int\limits_0^1 x\sin^2 x\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\forall x\in[0,1]$ យើងបាន $0\le x^2\le x\le 1$ និង $\sin^2 x=(\sin x)^2\ge 0$

នាំឱ្យ $x^2\sin^2 x\le x\sin^2 x$ ចំពោះ $\forall x\in[0,1]$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (1.20) ដូចនេះ $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 x\,dx\le\int\limits_0^1 x\sin^2 x\,dx$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $0<\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}dx<\frac{1}{e}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $0<1\le x\le\sqrt3<\pi$

នាំឱ្យ $x^2>0\,,\ 0<\sin x<1$ និង $e=e^1\le e^x$ ។

នាំឱ្យ $\frac{1}{x^2}>0\,,\ e^{-x}=\frac{1}{e^x}\le\frac{1}{e}$ និង $0<\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}\le\frac{1}{e\,x^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,\sqrt3]$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (1.20) នាំឱ្យ

$$0<\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}dx\le\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{1}{e\,x^2}dx=\frac{1}{e}\int\limits_1^{\sqrt3}x^{-2}\,dx$$

សមមូល $0<\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}dx\le\frac{1}{e}\cdot\left.\frac{x^{-1}}{(-1)}\right|_1^{\sqrt3}$

នាំឱ្យ $0<\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}dx\le\frac{-1}{e}\left(\frac{1}{\sqrt3}-1\right)=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{\sqrt3}\right)<\frac{1}{e}$ (ពិត)។

ដូចនេះ យើងបាន $0 < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{e}$ ។

១.៣.៣ ទ្រឹស្តីបទ Newton – Leibnitz

ទ្រឹស្តីបទ បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នោះគេបាន

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a) \quad (1.22)$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើ $[a, b]$ ។

បើគេមានព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នាំឱ្យ

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x g(t)\,dt\right] = g(x) \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in [a, b]$$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t)\,dt = G(x) + c$ (c ជាចំនួនពិតថេរ)។

បើគេឱ្យ $x = a$ នាំឱ្យ $\int_a^a g(t)\,dt = G(a) + c$

សមមូល $0 = G(a) + c$ សមមូល $c = -G(a)$; $\forall x \in [a, b]$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t)\,dt = G(x) - G(a)$ ។

បើគេឱ្យ $x = b$ នោះគេបាន $\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\int_3^5 4x^4 dx$ និង $\int_0^{\pi/4} \sin t\, dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(x) = \frac{4}{5}x^5 + c$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x) = 4x^4$ លើ $[3, 5]$ នាំឱ្យ

$$\int_3^5 4x^4 dx = \left(\frac{4}{5}x^5 + c\right)\Big|_3^5 = \left(\frac{4}{5}\cdot 5^5 + c\right) - \left(\frac{4}{5}\cdot 3^5 + c\right)$$

$$= \frac{11528}{5} = 2305.6$$ ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន $H(t) = -\cos t + c$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(t) = \sin t$ លើ $[0, \pi/4]$ នាំឱ្យ

$$\int_0^{\pi/4} \sin t\, dt = (-\cos t + c)\Big|_0^{\pi/4} = \left(-\cos\frac{\pi}{4} + c\right) - \left(-\cos 0 + c\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.2928 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ តាមរូបមន្តក្នុងផ្នែក១.២.៣ យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់មួយចំនួនដូចតទៅ៖

១. $\int_a^b \lambda\, dx = \lambda x\Big|_a^b = \lambda(b-a)$

២. $\int_a^b x^n\, dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$

៣. $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^a = \ln|a| - \ln|1| = \ln|a|$

៤. $\int_0^a e^y\, dy = e^y\Big|_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1$

៥. $\int_a^x 8^y\, dy = \left.\frac{8^y}{\ln 8}\right|_a^x = \frac{8^x}{\ln 8} - \frac{8^a}{\ln 8} = \frac{8^x - 8^a}{\ln 8}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_0^a (-8e^t + 6\cos t)\, dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G(t) = -8e^t + 6\sin t$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $g(t) = -8e^t + 6\cos t$ លើ $[0, a]$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^a (-8e^t + 6\cos t)\, dt = (-8e^t + 6\sin t)\Big|_0^a$

$$= \left(-8e^a + 6\sin a\right) - \left(-8e^0 + 6\sin 0\right)$$

$$= -8e^a + 6\sin a + 8$$

ឬម្យ៉ាងទៀត យើងក៏អាចគណនាវាតាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលគឺ

$$\int_0^a (-8e^t + 6\cos t)\, dt = -8\int_0^a e^t\, dt + 6\int_0^a \cos t\, dt$$

$$= -8e^a + 6\sin a + 8 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_2^3 \frac{(3t-4)^2}{t}dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល យើងបាន៖

$$\int_2^3 \frac{(3t-4)^2}{t}dt = \int_2^3 \frac{(3t)^2 - 2(3t)(4) + 4^2}{t}dt$$

$$= \int_2^3 \frac{9t^2 - 24t + 16}{t}dt = \int_2^3 \left(9t - 24 + \frac{16}{t}\right)dt$$

$$= \left(9 \cdot \frac{t^2}{2} - 24t + 16\ln|t|\right)\Big|_2^3$$

$$= \left(9 \cdot \frac{3^2}{2} - 24 \cdot 3 + 16\ln|3|\right) - \left(9 \cdot \frac{2^2}{2} - 24 \cdot 2 + 16\ln|2|\right)$$

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\int_{-4}^4 |3x+7|\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ពីនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាត យើងអាចសរសេរ

$$|3x+7| = \begin{cases} -(3x+7), & x < -\frac{7}{3} \\ 3x+7, & x \ge -\frac{7}{3} \end{cases}$$

និងប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ យើងបាន៖

$$\int_{-4}^4 |3x+7|\,dx = -\int_{-4}^{-7/3}(3x+7)\,dx + \int_{-7/3}^4 (3x+7)\,dx$$

$$= -\left(\frac{3}{2}x^2 + 7x\right)\Big|_{-4}^{-7/3} + \left(\frac{3}{2}x^2 + 7x\right)\Big|_{-7/3}^{4}$$

$$= -\left(\frac{3}{2}\left(\frac{-7}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)\right) + \left(\frac{3}{2}(-4)^2 + 7(-4)\right)$$

$$+ \left(\frac{3}{2}(4)^2 + 7(4)\right) - \left(\frac{3}{2}\left(\frac{-7}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{49}{3}+48=\frac{193}{3}=64.3333$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៧ គណនា $\int_{-2}^{5} t\left|t-1\right| dt$ និង $\int_{-2}^{5} t^3\left|t-1\right| dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

ពីនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាត យើងមាន

$$\left|t-1\right| = \begin{cases} -(t-1), & t<1 \\ t-1, & t\geq 1 \end{cases}$$

និងប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ យើងបាន៖

$$\int_{-2}^{5} t\left|t-1\right| dt = \int_{-2}^{1} t[-(t-1)]dt + \int_{1}^{5} t(t-1)\,dt$$

$$= -\int_{-2}^{1}(t^2-t)\,dt + \int_{1}^{5}(t^2-t)\,dt$$

$$= -\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} + \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{5}$$

$$= -\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)+\left(\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right)+\left(\frac{5^3}{3}-\frac{5^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{149}{6} \approx 24.8333$$

និង $\int_{-2}^{5} t^3\left|t-1\right| dt = \int_{-2}^{1} t^3[-(t-1)]\,dt + \int_{1}^{5} t^3\,(t-1)\,dt$

$$= -\int_{-2}^{1}(t^4-t^3)\,dt + \int_{1}^{5}(t^4-t^3)\,dt$$

$$= -\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{1} + \left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{1}^{5}$$

$$= -\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^4}{4}\right)+\left(\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^4}{4}\right)+\left(\frac{5^5}{5}-\frac{5^4}{4}\right)-\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^4}{4}\right)$$

$$= \frac{9169}{20} = 458.45$$ ។

១.៤ វិធីប្តូរអថេរ

ឧបមាថា គេមានអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\mathrm{J} = \int f[h(x)]\,h'(x)\,\mathrm{dx}$ ។

តាង $\mathrm{v} = h(x)$ នោះ $\mathrm{dv} = h'(x)dx$ ។ យើងបាន៖

$$\mathrm{J} = \int f[h(x)]\, h'(x)\, \mathrm{dx} = \int f(\mathrm{v})\, \mathrm{dv} = F(\mathrm{v}) + c_1 = F(h(x)) + c_1 \quad (1.23)$$

ដែល F(v) ជាព្រីមីទីវនៃ f(v) និង c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងក៏មានទ្រឹស្តីនៅក្នុងអាំងតេក្រាលកំណត់ដូចខាងក្រោម។

គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$។ បើអនុគមន៍ $x = h(t)$ មានដេរីវេ $h'(t)$ ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha, \beta]$ ដែល $h([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ ហើយ $h(\alpha) = a$ និង $h(\beta) = b$ នោះអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[h(t)]h'(t)dt \qquad (1.24)$$ (រូបមន្តប្តូរអថេរ)[៦]។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេដឹងថា $F[h(t)]$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f[h(t)]\, h'(t)$។ តាមរូបមន្ត Newton-Leibnitz គេបាន

$$\int_\alpha^\beta f[h(t)]\, h'(t)\, dt = F[h(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[h(\beta)] - F[h(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f\left(x\right) dx$$ (ពិត) ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨ គណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ និង $\int a^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ តាមពីរករណីនៃ α គឺ $\alpha = 0$ និង $\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int e^{0\cdot x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរ គឺតាង $u = \alpha x$ នាំឱ្យ $du = \alpha\, dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{du}{\alpha}$ ។ នាំឱ្យ

$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int e^u \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int e^u\,\mathrm{du} = \frac{1}{\alpha}e^u + c = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c \qquad (1.25)$$

[៦] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលកំណត់* ” ទំព័រទី៤១និងទី៤២ ឆ្នាំ១៩៩៧

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

យើងទាញបាន

$$\int a^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\int\left(e^{\ln a}\right)^{\alpha x}\mathrm{d}x=\int e^{(\alpha\ln a)x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{(\alpha\ln a)x}}{(\alpha\ln a)}+c=\frac{a^{\alpha x}}{\alpha\ln a}+c \quad (1.26)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{q}{\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\neq 0)$ និង $\int_0^1\frac{e^x}{4e^x+3}\mathrm{d}x$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\mathrm{v}=\alpha x+\beta$ នោះ $\mathrm{dv}=\alpha\,dx\Leftrightarrow dx=\frac{1}{\alpha}\,dv$ ។

យើងបាន

$$\int\frac{q}{\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x=\int\frac{q}{v}\cdot\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}v=\frac{q}{\alpha}\int\frac{dv}{v}$$

$$=\frac{q}{\alpha}\ln|v|+c=\frac{q}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta|+c \quad (1.27)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

និង $$\int_0^1\frac{e^x}{4e^x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{d(e^x)}{4e^x+3}=\frac{1}{4}\ln\left|4e^x+3\right|\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln(4e+3)-\ln 7\right)\approx 0.1710 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២០ គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int e^x\sqrt{(3e^x+5)^9}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\mathrm{v}=3\mathrm{e}^x+5$ នោះ $\mathrm{dv}=3\mathrm{e}^x\,dx \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x\,dx=\frac{1}{3}\,\mathrm{dv}$ ។

យើងបាន៖

$$\mathrm{I}=\int e^x\sqrt{(3e^x+5)^9}\,dx=\int\sqrt{v^9}\cdot\frac{1}{3}dv=\frac{1}{3}\int v^{\frac{9}{2}}\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{v^{\frac{9}{2}+1}}{(\frac{9}{2}+1)}+c=\frac{1}{3}\cdot\frac{v^{\frac{11}{2}}}{(11/2)}+c=\frac{2}{33}\left(3e^{x}+5\right)^{\frac{11}{2}}+c$$ ។

១.៥ វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

បើ $u=u(x)$ និង $v=v(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ គេបានអាំងតេក្រាល $\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du$ (1.28) (រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)[៧] ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $u=u(x)$ និង $v=v(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះយើងបាន $d(uv)=u\,dv+v\,du$ ។

នាំឱ្យ $\int_a^b d(uv)=\int_a^b u\,dv+\int_a^b v\,du$

តែ $\int_a^b d(uv)=uv\big|_a^b$

នាំឱ្យ $\int_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ទី២១ គណនា $\mathrm{I}=\int_0^2 \mathrm{x\,e^{2x}\,dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងយក $u=x$ នាំឱ្យ $du=dx$

និង $dv=e^{2x}dx$ នាំឱ្យ $v=\int dv=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2\ln e}=\frac{e^{2x}}{2}$ ។

នាំឱ្យ $\mathrm{I}=\int_0^2 \mathrm{x\,e^{2x}\,dx}=\int_0^2 \mathrm{u\,dv}=\mathrm{uv}\big|_0^2-\int_0^2 \mathrm{v\,du}$

$$=\frac{\mathrm{x\,e^{2x}}}{2}\bigg|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e^{2x}\,dx}=\frac{2\mathrm{e}^4}{2}-0-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\bigg|_0^2$$

ឧទាហរណ៍ទី២២ គណនា $\mathrm{J}=\int\frac{\mathrm{x\ln x\,dx}}{(\mathrm{x}^2+1)^2}$ ។

---

[៧] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា "*អាំងតេក្រាលកំណត់*" ទំព័រទី៤៣ ឆ្នាំ១៩៩៧

ដំណោះស្រាយ

យើងយក $u=\ln x$ នាំឱ្យ $du=\dfrac{dx}{x}$

និង $dv=\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ នាំឱ្យ $v=\int dv=\int\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\int(x^2+1)^{-2}\,d(x^2+1)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1}}{(-1)}=-\frac{1}{2(x^2+1)}\ ។$$

នាំឱ្យ $\mathrm{J}=\int\dfrac{\mathrm{x\ln x\,dx}}{(\mathrm{x}^2+1)^2}=\int \mathrm{u\,dv}=\mathrm{uv}-\int \mathrm{v\,du}$

$$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{x}{(x^2+1)}\,dx$$

$$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+c\ ។$$

១.៦ អាំងតេក្រាល Improper [៨]

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអាំងតេក្រាល Improperមានបីទម្រង់ដូចតទៅ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,+\infty)$ ។ យើងកំណត់

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{N\to+\infty}\int_a^{N}f(x)\,dx\quad(1.29)\ ។$$

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងរាប់អស់ នោះយើងនិយាយថាអាំងតេក្រាល $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$

[៨] http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/

ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គណនា $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ និង $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^{N} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^{N} x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^N = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{N}+1\right) = 1$$

មានន័យថា $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ រួមរក 1

និង $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \tan^{-1}x\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

មានន័យថា $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ រួមរក $\frac{\pi}{2}$ ។

សម្គាល់ ក្នុងសៀវភៅខ្លះ គេសរសេរ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x\Big|_0^{+\infty} = \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសរសេរ និង គណនាអាំងតេក្រាលឱ្យបានរហ័ស។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty, b]$ ។ យើងកំណត់

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^{b} f(x)\,dx \quad (1.30)$$ ។

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងរាប់អស់ នោះយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

ឧទាហរណ៍ទី២៤ គណនា $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-5)^{4/3}}dx$ និង $\int_{-\infty}^{0} e^{5x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-5)^{4/3}}dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{2} \frac{1}{(x-5)^{4/3}}dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{2}(x-5)^{-4/3}dx$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \left.\frac{(x-5)^{-4/3+1}}{(-4/3+1)}\right|_{N}^{2} = \lim_{N\to-\infty}\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{-3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{N-5}}\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{3}}+0 = \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$$

និង $$\int_{-\infty}^{0} e^{5x}dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{5x}dx = \lim_{N\to-\infty}\left.\frac{e^{5x}}{5}\right|_{N}^{0}$$

$$= \lim_{N\to-\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{e^{5N}}{5}\right) = \lim_{N\to-\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5e^{-5N}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}-0 = \frac{1}{5}$$ ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ ប្រសិនបើអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ និង $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ ទាំងពីររួម ចំពោះចំនួនពិត c មួយចំនួន នោះយើងកំណត់

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \quad (1.31)$$

និងយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ នេះរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

ឧទាហរណ៍ទី២៥ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+25}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាល Improper យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+25} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+25} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+25}$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{dx}{x^2+25} + \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} \frac{dx}{x^2+25}$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{dx}{x^2+5^2} + \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} \frac{dx}{x^2+5^2}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot \lim_{N\to-\infty} \tan^{-1}\frac{x}{5}\Big|_{N}^{0} + \frac{1}{5}\cdot \lim_{M\to+\infty} \tan^{-1}\frac{x}{5}\Big|_{0}^{M}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot \lim_{N\to-\infty}\left(\tan^{-1}\frac{0}{5} - \tan^{-1}\frac{N}{5}\right) + \frac{1}{5}\cdot \lim_{M\to+\infty}\left(\tan^{-1}\frac{M}{5} - \tan^{-1}\frac{0}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{5}$$

និង $$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-5x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-5x^2} dx$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} x e^{-5x^2} dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} x e^{-5x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{10} \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} e^{-5x^2} d\left(-5x^2\right) - \frac{1}{10} \lim_{M\to+\infty} \int_{0}^{M} e^{-5x^2} d\left(-5x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{10}\left(1-0\right)-\frac{1}{10}\left(0-1\right)=0$$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី១បានបង្ហាញនូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល ទ្រឹស្តីបទរូបមន្តគ្រឹះ ហើយលក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និង អាំងតេក្រាលកំណត់។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ វិធីប្តូរអថេរ និងវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាននៅក្នុងជំពូកទី២បន្តទៀត។

ជំពូកទី២

ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

(Types of Integrals of Rational Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី២នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការបំបែកប្រភាគសនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និង ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចតទៅ៖

២.១ ការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$

គេឱ្យ $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទានឬប្រភាគមួយដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ក្នុងនោះ $P(x)$ ជាពហុធាភាគយក និង $Q(x)$ ជាពហុធាភាគបែងដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ហើយ $Q(x)\neq 0$ ។

គេឧបមាថាប្រភាគ F ជាតំណាងដោយគូ (P,Q) នៃពហុធាបឋមរវាងគ្នា។ គេថា F ជាប្រភាគមិនអាចបង្រួមបាន។ នោះវាមានប៉ូលនិងជាតុសូន្យផ្សេងៗគ្នា។

សម្គាល់

១. $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន ឬ ប្រភាគសនិទាន ឬ ប្រភាគមួយដែលមានមេគុណ ជាចំនួនពិត។ អនុគមន៍នេះកំណត់បាន កាលណា $Q(x)\neq 0$ ។

២. ប៉ូលនៃប្រភាគ F ជាឫសនៃពហុធាភាគបែង Q និង ជាតុសូន្យនៃប្រភាគ F ជាឫស នៃពហុធាភាគយក P។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងឬស្មើនឹងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ គេសរសេរ $\deg P(x)\geq \deg Q(x)$ នោះយើងត្រូវយកពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $Q(x)$ តែម្តង។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ គេសរសេរ $\deg P(x)<\deg Q(x)$ និង តាមទ្រឹស្តីពីជគណិត ពហុធាភាគបែងអាចដាក់ជាកត្តាក្នុង $\mathbb{R}$ ក្រោមទម្រង់ធម្មតាគឺ

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_k)^{\alpha_k}\left[(x-b_1)^2+c_1{}^2\right]^{\beta_1}\cdots\left[(x-b_l)^2+c_l{}^2\right]^{\beta_l} \quad (2.1)$$ ។

នាំឱ្យ $F(x)$ អាចបំបែកជាផលបូកជាតុងាយឬជាប្រភាគដោយផ្នែកឬជាប្រភាគតូចៗដែលយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមរូបមន្តបានគឺ

$$F(x)=\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1j}}{(x-a_1)^j}+\cdots+\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{kj}}{(x-a_k)^j}+\sum_{m=1}^{\beta_1}\frac{B_{1m}x+C_{1m}}{\left[(x-b_1)^2+c_1^{\,2}\right]^m}+\cdots+\sum_{m=1}^{\beta_l}\frac{B_{lm}x+C_{lm}}{\left[(x-b_l)^2+c_l^{\,2}\right]^m}\ (2.2)$$ ។

ក្នុងករណីប៉ូលងាយ (ប៉ូលសាមញ្ញ) ជាចំនួនពិត ឬ ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះយើងប្រើវិធីរកមេគុណដូចតទៅ៖

- បើ $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)}=\dfrac{A}{(x-a)}+\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ នោះ

$A=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}=\mathrm{Res}(F)$ (រ៉េស៊ីឌុយនៃ F ត្រង់ a) (2.3) ។

- បើ $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x)}{[(x-b)^2+c^2]\,Q_1(x)}=\dfrac{Bx+C}{(x-b)^2+c^2}+\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ នាំឱ្យ

$[(x-b)^2+c^2]F(x)=\dfrac{P(x)}{Q_1(x)}=Bx+C+[(x-b)^2+c^2]\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ ។

ដោយតាង $x=b+ic$ នោះយើងបានសមីការថ្មីគឺ $Bx+C=\dfrac{P(x)}{Q_1(x)}$ (2.4) ដែល B និង C ជាចំនួនដែលអាចកំណត់បាន។ វាអាចប្រើតម្លៃជំនួសនៃ x ដោយជ្រើសរើសស្មើនឹង $0, \pm1, i, \ldots$ ។

ជាពិសេស បើ $F(x)=\sum_i\dfrac{A_i}{x-a_i}$ នាំឱ្យ

$\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum_i\dfrac{xA_i}{x-a_i}=\sum_i A_i$ ។

ដូចនេះ យើងបាន $\sum\mathrm{Res}(F)=\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)$ (2.5) ។

ឧទាហរណ៍ទី១ ចូរបំបែក $F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ឬក៏សរសេរ F ជាប្រភាគដោយផ្នែក។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ យើងមាន $F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យ $x^2+x-1=A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1)$

$$=A(x^2-x-2)+B(x^2-3x+2)+C(x^2-1)$$

$$=(A+B+C)x^2+(-A-3B)x+(-2A+2B-C)$$ ។

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃត្រីជា យើងបាន៖

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-3B=1 \\ -2A+2B-C=-1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (I) ផ្តល់ឱ្យ $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{6}$ និង $C=\dfrac{5}{3}$ ។

ដូចនេះ $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}$ ។

របៀបទី២ យើងមាន $F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យ $x^2+x-1=A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1) \quad (*)$ ។

- យើងយក $x=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ $(*)$ ផ្តល់ឱ្យ $1=-2A\Rightarrow A=-\dfrac{1}{2}$ ។
- យើងយក $x=-1$ ជំនួសក្នុងសមីការ $(*)$ ផ្តល់ឱ្យ $-1=6B\Rightarrow B=-\dfrac{1}{6}$ ។
- យើងយក $x=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ $(*)$ ផ្តល់ឱ្យ $5=3C\Rightarrow C=\dfrac{5}{3}$ ។

ដូចនេះ $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}$ ។

របៀបទី៣ យើងមាន $F(x)=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$

ដែល $A=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}=-\dfrac{1}{2}$

$$B=\lim_{x\to -1}(x+1)F(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x-2)}=-\frac{1}{6}$$

និង $C=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)F(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5}{3}$ ។

ដូចនេះ: $F(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-2}$ ។

សម្គាល់ ចំពោះរបៀបទី១ និងទី២ គេច្រើនប្រើប្រាស់វានៅកម្រិតមធ្យមសិក្សា រីឯរបៀបទី៣ វិញ គេប្រើប្រាស់វានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ឧទាហរណ៍ទី២ ចូរបំបែក $F(x)=\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ តាមវិធីចែកពហុធា យើងបាន

$$F(x)=\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=x-1+\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

និងប្រភាគ $F_1(x)=\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យ $1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x+1)$

$=(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)$ ។

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃត្រីធា យើងបាន៖

$$(\text{II})\ \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (II) ផ្តល់ឱ្យ $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$ និង $C=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ: $F(x)=x-1+F_1(x)=x-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+1}{x^2+1}$ ។

របៀបទី២ តាមវិធីចែកពហុធា យើងបាន

$$F(x)=\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=x-1+\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

និងប្រភាគ $F_1(x)=\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យ $\mathrm{A}=\lim_{x\to -1}(x+1)F_1(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x^2+1)}=\frac{1}{2}$ ។

ដើម្បីកំណត់ B និង C យើងអាចគុណ $F_1(x)$ នឹង (x^2+1) រួចយក $x=i$ ផ្តល់ឱ្យ

$$\frac{1}{x+1}=Bx+C+(x^2+1)\left(\frac{A}{x+1}\right) \text{ និង } \frac{1}{i+1}=Bi+C$$

នាំឱ្យ $B=-\frac{1}{2}$ និង $C=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ៖ $F(x)=x-1+F_1(x)=x-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+1}{x^2+1}$ ។

២.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$ យើងតាង $u=ax+b$ នាំឱ្យ

$du=a\,dx$ សមមូល $dx=\frac{du}{a}$ $(a\neq 0)$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx=\int \frac{1}{u^n}\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int u^{-n}\,du$ ។

បន្ទាប់មក យើងសិក្សាពីរករណីគឺ $n=1$ និង $n\neq 1$។

- បើ $n=1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx=\frac{1}{a}\int u^{-1}\,du=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{a}\ln|u|+c=\boxed{\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c} \qquad (2.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n\neq 1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx=\frac{1}{a}\int u^{-n}\,du=\frac{u^{-n+1}}{a(-n+1)}+c$$

$$=\frac{-1}{a(n-1)}\cdot\frac{1}{u^{n-1}}+c=\boxed{\frac{-1}{a(n-1)}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}+c} \qquad (2.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \frac{3}{4x+5}dx$ និង $\int \frac{1}{(2x-1)^7}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.6) និង (2.7) យើងបាន៖

$$\int \frac{3}{4x+5}dx = 3\int \frac{1}{4x+5}dx = \frac{3}{4}\ln|4x+5| + c$$

និង $\int \frac{1}{(2x-1)^7}dx = \frac{-1}{2(7-1)}\cdot\frac{1}{(2x-1)^{7-1}} + c = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(2x-1)^6} + c$ ។

២.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2 \pm a^2}$

ជាមុនដំបូង យើងគណនា $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+a^2}$ ឬ $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ ដែលជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់។ តាង $x = a\tan t$ នាំឱ្យ $t = \arctan\frac{x}{a} = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ និង $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$ ។ តាមរូបមន្តប្តូរអថេរ យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{1}{(a\tan t)^2+a^2}\cdot\frac{a\,dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int \cos^2 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + c = \boxed{\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c} = \boxed{\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c} \quad (2.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0$ ។

សម្គាល់ គេសរសេរអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $tg\,x$ ឬ $\tan x$ ដោយ $arctg\,x$ ឬ $\arctan x$ ឬ $\tan^{-1}x$ ។

បន្ទាប់មក យើងគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2-a^2} = -\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-\mathrm{x}^2}$ ។

អាំងតេ ក្រាល $\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-\mathrm{x}^2}$ មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{a^2-x^2}$ $(a \neq 0)$ ដែលយើងអាចសរសេរវាជា ប្រភាគដោយផ្នែកខាងក្រោម៖

យើងមាន $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x}$

ក្នុងនោះ A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។ យើងអាចកំណត់ចំនួន A និង B តាមពីររបៀប។

របៀបទី១

យើងមាន

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{a+x}=\frac{A(a+x)+B(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{(A-B)x+Aa+Ba}{a^2-x^2} \text{ ។}$$

តាមការផ្ទឹមភាគយក នាំឱ្យ $A-B=0$ និង $Aa+Ba=1$។ នាំឱ្យ $A=B=\dfrac{1}{2a}$ ។

របៀបទី២

យើងមាន $\dfrac{1}{a^2-x^2}=\dfrac{A}{a-x}+\dfrac{B}{a+x}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(a-x)$ រួចយក $x=a$ នាំឱ្យ $A=\dfrac{1}{a+a}=\dfrac{1}{2a}$ ។
- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(a+x)$ រួចយក $x=-a$ នាំឱ្យ $B=\dfrac{1}{a-(-a)}=\dfrac{1}{2a}$ ។

យើងបាន $\dfrac{1}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{1}{a+x}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\left(\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{a-x}+\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{a+x}\right)dx$

$$=-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+\frac{1}{2a}\ln|a+x|+c=\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c} \quad (2.9)$$

និង $\displaystyle\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2-a^2}=-\int\frac{\mathrm{dx}}{a^2-\mathrm{x}^2}=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c_1$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+c_1=\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c_1} \quad (2.10)$$

ដែល c និង c_1 ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ $a\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ និង $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.8) យើងបាន៖

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

និងតាង $u = \ln x$ នាំឱ្យ $x = e^u$ និង $du = \frac{dx}{x}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $x = 1$ នោះ $u = 0$ និង បើ $x = e$ នោះ $u = 1$ ។

នាំឱ្យ $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2}$ និង $\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.9) និង (2.10) យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2}$ និង $\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16}$ ដូចតទៅ៖

$$\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{4}{2} - \ln\frac{3}{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \approx -0.2027$$

និង $$\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16} = \int_5^7 \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{2(4)}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\Bigg|_5^7$$

$$= \frac{1}{8}\left(\ln\frac{3}{11} - \ln\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{27}{11}\right)$$ ។

២.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ ។ អនុគមន៍នេះមានពហុធាភាគបែងជាត្រីធា ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta = b^2 - 4ac$ ដើម្បីស្វែងរកឫសនៃត្រីធានេះ។

១. ប្រសិនបើ $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ និង

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{2a}} + c_1$$

$$= \boxed{\frac{-2}{2ax+b} + c_1} = \boxed{\frac{-2}{(ax^2+bx+c)'} + c_1} \quad (2.11)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

២. ប្រសិនបើ $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ និង

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \int \frac{[(x-x_2)-(x-x_1)]dx}{a(x_1-x_2)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int \left[\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right]dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right] + c_1$$

$$= \boxed{\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + c_1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + c_1} \quad (2.12)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ នោះត្រីធាគ្មានឫសចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីធាអាចសរសេរជា

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

និង $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\right) + c_1$$

$$= \boxed{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c_1} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{(ax^2+bx+c)'}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c_1} \quad (2.13)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ $\left(a \neq b, (a, b) \neq (0, 0) \right)$, $\int_4^5 \frac{dt}{(t-2)(t-3)}$ និង $\int_3^6 \frac{dv}{v^2-3v+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.12) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \boxed{\frac{1}{(a-b)}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+c} \quad (2.14)$$

$$\int_4^5 \frac{dt}{(t-2)(t-3)} = \frac{1}{(3-2)}\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_4^5$$

$$= \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{2/3}{1/2}\right) = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$$

និង $$\int_3^6 \frac{dv}{v^2-3v+2} = \int_3^6 \frac{dv}{(v-1)(v-2)} = \frac{1}{(2-1)}\ln\left|\frac{v-2}{v-1}\right|\Bigg|_3^6$$

$$= \ln\frac{4}{5} - \ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{4/5}{1/2}\right) = \ln\frac{8}{5} \approx 0.4700$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \frac{1}{4x^2-24x+36}dx$ និង $\int \frac{3x}{x^4-2x^2+2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានត្រីធា $4x^2-24x+36$ មាន $\Delta = b^2-4ac = (-24)^2-4(4)(36) = 0$ នោះ តាមរូបមន្ត (2.11) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{4x^2-24x+36}dx = \frac{-2}{(4x^2-24x+36)'}+c = \frac{-2}{8x-24}+c = \frac{-1}{4x-12}+c$$ ។

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{3x}{x^4-2x^2+2}dx$ យើងតាង $y=x^2$ នាំឱ្យ

$dy=2x\,dx \Leftrightarrow x\,dx=\frac{1}{2}dy$ និង $\int \frac{3x}{x^4-2x^2+2}dx=\frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2-2y+2}dy$ ។

ប៉ុន្តែត្រីធា y^2-2y+2 មាន $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4<0$ នោះ តាមរូបមន្ត (2.13) យើងបាន៖

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{x^4-2x^2+2}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2-2y+2}dy \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4}}\arctan\left(\frac{(y^2-2y+2)'}{\sqrt{4}}\right)+c \\ &= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{2y-2}{2}\right)+c \\ &= \frac{3}{2}\arctan\left(y-1\right)+c=\frac{3}{2}\arctan\left(x^2-1\right)+c\end{aligned}$$ ។

២.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{(a_1x+b_1)\,dx}{ax^2+bx+c}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(a_1x+b_1)\,dx}{ax^2+bx+c}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $F(x)=\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}$ ។ អនុគមន៍នេះមានពហុធាភាគយកជាទ្វេធា a_1x+b_1 $(a_1\neq 0)$ និងពហុធាភាគបែងជាត្រីធា ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ ។ យើងនឹងសិក្សាពីរករណីដូចតទៅ៖

- ប្រសិនបើ $a_1x+b_1=k(2ax+b)$ នាំឱ្យ $\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}=\frac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}$ និង

$$\int \frac{(a_1x+b_1)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{k(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}=k\int \frac{(ax^2+bx+c)'\,dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\boxed{k\ln\left|ax^2+bx+c\right|+c_1} \qquad (2.15)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ។

- ប្រសិនបើ $a_1x+b_1\neq k(2ax+b)$ នាំឱ្យ

$$\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}=\frac{\frac{a_1}{2a}(2ax+b)+b_1-\frac{a_1b}{2a}}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{a_1}{2a}\cdot\frac{2a\,x+b}{a\,x^2+bx+c}+(b_1-\frac{a_1b}{2a})\cdot\frac{1}{a\,x^2+bx+c}$$

និង $\int\frac{(a_1x+b_1)\,dx}{a\,x^2+bx+c}=\frac{a_1}{2a}\int\frac{(2ax+b)\,dx}{a\,x^2+bx+c}+(b_1-\frac{a_1b}{2a})\int\frac{dx}{a\,x^2+bx+c}$

$$=\boxed{\frac{a_1}{2a}\ln\left|a\,x^2+bx+c\right|+(b_1-\frac{a_1b}{2a})\int\frac{dx}{a\,x^2+bx+c}}\quad(2.16)$$

ដែលអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{a\,x^2+bx+c}$ អាចកំណត់បាននៅផ្នែក ២.៤ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int\frac{(6x-5)}{3x^2-5x+6}dx$ និង $\int\frac{3x+2}{x^2+x+1}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានត្រីធា $3x^2-5x+6$ និង $(3x^2-5x+6)'=6x-5$ នោះតាមរូបមន្ត (2.15) យើងបាន៖

$$\int\frac{(6x-5)}{3x^2-5x+6}dx=\ln\left|3x^2-5x+6\right|+c_1$$

និងតាមរូបមន្ត (2.16) នាំឱ្យ

$$\int\frac{3x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2(1)}\ln\left|x^2+x+1\right|+\left(2-\frac{3\times1}{2(1)}\right)\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c \text{ ។}$$

ម្យ៉ាងទៀត អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $F(x)=\frac{a_1x+b_1}{a\,x^2+bx+c}$ មានពហុធាភាគបែងជាត្រីធា $a\,x^2+bx+c\quad(a\neq0)$ ដែលមាន $\Delta=b^2-4ac$ ។ ឥឡូវនេះ យើងអាចគណនា

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(a_1 x+b_1)\,dx}{a x^2+bx+c}$ តាមវិធីផ្សេងទៀតដោយសិក្សាករណី $\Delta \geq 0$ ។ ចំពោះ

ករណី $\Delta < 0$ យើងត្រូវគណនាវាតាមរូបមន្ត (2.16)។

១. ប្រសិនបើ $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $a x^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ និង

$$F(x) = \frac{a_1 x+b_1}{a x^2+bx+c} = \frac{a_1 x+b_1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{A}{x+\frac{b}{2a}} + \frac{B}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

ក្នុងនោះ A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

នាំឱ្យយើងបានសមភាពនៃពហុធា $\left(\frac{a_1}{a}\right)x+\frac{b_1}{a} = A\left(x+\frac{b}{2a}\right)+B = Ax+A\frac{b}{2a}+B$

នាំឱ្យ $A=\frac{a_1}{a}$ និង $\frac{bA}{2a}+B=\frac{b_1}{a}$ នាំឱ្យ $A=\frac{a_1}{a}$ និង $B=\frac{b_1}{a}-\frac{bA}{2a}=\frac{2ab_1-ba_1}{2a^2}$ ។

នាំឱ្យ

$$\int \frac{(a_1 x+b_1)\,dx}{a x^2+bx+c} = \int \frac{a_1 x+b_1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}dx = A\int \frac{1}{x+\frac{b}{2a}}dx + B\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}dx$$

$$= A\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| + B\,\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{-1}}{(-1)} + c_1$$

$$= A\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| - \frac{B}{x+\frac{b}{2a}} + c_1$$

$$= A\ln|2ax+b| - \frac{2aB}{2ax+b} + c_2$$

$$= \boxed{\frac{a_1}{a}\ln|2ax+b| - \left(\frac{2ab_1-ba_1}{a}\right)\frac{1}{2ax+b} + c_2} \qquad (2.17)$$

ដែល c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

២. ប្រសិនបើ $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ និង

$$F(x) = \frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c} = \frac{a_1x+b_1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

ដែល $A = \lim\limits_{x\to x_1}(x-x_1)F(x) = \lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{a_1x+b_1}{a(x-x_2)} = \dfrac{a_1x_1+b_1}{a(x_1-x_2)} = \dfrac{a_1x_1+b_1}{\sqrt{\Delta}}$

និង $B = \lim\limits_{x\to x_2}(x-x_2)F(x) = \lim\limits_{x\to x_2}\dfrac{a_1x+b_1}{a(x-x_1)} = \dfrac{a_1x_2+b_1}{a(x_2-x_1)} = -\dfrac{a_1x_2+b_1}{\sqrt{\Delta}}$ ។

នាំឱ្យ

$$\int \frac{(a_1x+b_1)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{(a_1x+b_1)dx}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \int\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)dx$$

$$= \boxed{A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + c_1} \quad (2.18)$$

ដែល $A = \dfrac{a_1x_1+b_1}{a(x_1-x_2)} = \dfrac{a_1x_1+b_1}{\sqrt{\Delta}}$ និង $B = \dfrac{a_1x_2+b_1}{a(x_2-x_1)} = -\dfrac{a_1x_2+b_1}{\sqrt{\Delta}}$ ហើយ c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \dfrac{(8x+5)}{4x^2-12x+9}dx$ និង $\int \dfrac{3x+11}{x^2-x-6}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ត្រីធា $4x^2-12x+9$ មាន $\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4(4)(9) = 0$ នោះតាមរូបមន្ត (2.17) យើងបាន៖

$$\int \frac{(8x+5)}{4x^2-12x+9}dx = \frac{8}{4}\ln|8x-12| - \left(\frac{2(4)(5)-(-12)(8)}{4}\right)\cdot\frac{1}{8x-12} + c_1$$

$$= 2\ln|8x-12| - \frac{34}{8x-12} + c_1 \text{ ។}$$

ចំពោះត្រីធា x^2-x-6 មាន $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4(1)(-6) = 25 > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរគឺ $x_1 = \dfrac{1+5}{2(1)} = 3,\ x_2 = \dfrac{1-5}{2(1)} = -2$ ។

តាមរូបមន្ត (2.18) យើងបាន៖

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx = \frac{3(3)+11}{5}\ln|x-3| - \frac{3(-2)+11}{5}\ln|x+2| + c_1$$

$$= 4\ln|x-3| - \ln|x+2| + c_1 \text{ ។}$$

២.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $F(x) = \frac{1}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាប្រភាគសនិទាន កាលណា $m \in \mathbb{N}$ ។ យើងនឹងសិក្សាពីករណី $m=1$ និង $m \neq 1$ ដូចតទៅ៖

- ករណី $m=1$ នោះតាមផ្នែក ២.៣ (រូបមន្ត (2.8)) យើងបាន៖

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

ដែល c ជាចំនួនថេរ និង $a \neq 0$ ។

- ករណី $m \neq 1$ យើងតាង $I_m = \int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$ ។ យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង I_m និង I_{m-1} ។

នាំឱ្យ
$$I_{m-1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^{m-1}} = \int \frac{(\mathrm{x}^2+a^2)\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$$
$$= \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m} + \int \frac{a^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$$
$$= \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m} + a^2 I_m = J_m + a^2 I_m \quad (*)$$

ដែល $J_m = \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+a^2)^m}$ ។

យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ និង $dv = \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}$ នាំឱ្យ

$du = dx$ និង $v = \int \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^m} = \frac{1}{2}\int \left(x^2+a^2\right)^{-m} d\left(x^2+a^2\right) = \frac{-1}{2(m-1)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}$ ។

នាំឱ្យ $J_m = \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)^m} = \int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$= \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}$$

$$= \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} \text{ ។}$$

ពីសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$I_{m-1} = J_m + a^2 I_m = \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} + a^2 I_m$$

នាំឱ្យ $a^2 I_m = \frac{x}{2(m-1)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$

នាំឱ្យ $I_m = \frac{x}{2(m-1)a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} I_{m-1}$ ។

ដូចនេះ $$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}} \quad (2.19)$$

ដែល $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ និង $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.19) និង (2.8) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{2(2-1)(4)\left(x^2+4\right)} + \frac{2(2)-3}{2(2-1)(4)} \int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctan\frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{16} \arctan\frac{x}{2} + c$$

និង $\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+4)^3} = \frac{x}{2(3-1)(4)\left(x^2+4\right)^2} + \frac{2(3)-3}{2(3-1)(4)}\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2+4)^2}$

$$= \frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{16}\left[\frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}\right] + c_1$$

$$= \frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3x}{128\left(x^2+4\right)} + \frac{3}{256}\arctan\frac{x}{2} + c_1 \text{ ។}$$

២.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានរាង $\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $F(x)=\frac{1}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាប្រភាគសនិទាន កាលណា $m\in\mathbb{N}$ ។ យើងនឹងសិក្សាពីរករណី $m=1$ និង $m\neq 1$ ដូចតទៅ៖

- ករណី $m=1$ នោះតាមផ្នែក ២.៣ (រូបមន្ត (2.10)) យើងបាន៖

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c_1 = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c_1$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a\neq 0$ ។

- ករណី $m\neq 1$ យើងតាង $I_m = \int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$ ។ យើងនឹងរកទំនាក់ទំនងរវាង I_m និង I_{m-1} ។

នាំឱ្យ $I_{m-1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^{m-1}} = \int \frac{(\mathrm{x}^2-a^2)\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$

$$= \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m} - \int \frac{a^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$$

$$= \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m} - a^2 I_m = J_m - a^2 I_m \quad (*_1)$$

ដែល $J_m = \int \frac{\mathrm{x}^2\,\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}^2-a^2)^m}$ ។

យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ និង $dv = \dfrac{x\,dx}{\left(x^2-a^2\right)^m}$ នាំឱ្យ

$du = dx$ និង $v = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-a^2\right)^m} = \frac{1}{2}\int \left(x^2-a^2\right)^{-m} d\left(x^2-a^2\right) = \frac{-1}{2(m-1)\left(x^2-a^2\right)^{m-1}}$ ។

នាំឱ្យ $J_m = \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^m} = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{m-1}}$$

$$= \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1}$$ ។

ពីសមីការ $(*_1)$ យើងបាន៖

$$I_{m-1} = J_m - a^2 I_m = \frac{-x}{2(m-1)\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)} I_{m-1} - a^2 I_m$$

នាំឱ្យ $a^2 I_m = \dfrac{-x}{2(m-1)\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \dfrac{3-2m}{2(m-1)} I_{m-1}$

នាំឱ្យ $I_m = \dfrac{-x}{2(m-1)a^2\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \dfrac{3-2m}{2(m-1)a^2} I_{m-1}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m} = \frac{-x}{2(m-1)a^2\left(x^2-a^2\right)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2(m-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{m-1}}}$ (2.20)

ដែល $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (2.20) និង (2.10) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(x^2-4)^2} = \frac{-x}{2(2-1)(4)\left(x^2-4\right)} + \frac{3-2(2)}{2(2-1)(4)}\int \frac{dx}{x^2-4}$$

$$=-\frac{x}{8\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2-4}$$

$$=-\frac{x}{8\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$$

$$=-\frac{x}{8\left(x^2-4\right)}-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c \text{ ។}$$

២.៨ អនុវត្តន៍នៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទាន

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងលើកយកឧទាហរណ៍មួយចំនួនដែលទាក់ទងនឹងការបំបែកប្រភាគសនិទានទៅជាប្រភាគដោយផ្នែក។ បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនាអាំងតេក្រាល $\int F(x)dx$ ដែល

$$F(x)=\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមឧទាហរណ៍ទី១ យើងមាន៖

$$F(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-2} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int F(x)dx=\int(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-2})dx$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-2|+c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_3^4\frac{dt}{t(t-1)(t-2)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{t(t-1)(t-2)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{(t-2)^2}+\frac{D}{t-2}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង t រួចយក $t=0$ នាំឱ្យ $A=-\frac{1}{4}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(t-1)$ រួចយក $t=1$ នាំឱ្យ $B=1$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(t-2)^2$ រួចយក $t=2$ នាំឱ្យ $C=\frac{1}{2}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង t រួចយក $t\to+\infty$ នាំឱ្យ $0=A+B+D$ នាំឱ្យ $D=-A-B=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$ ។

យើងបាន $\frac{1}{t(t-1)(t-2)^2}=-\frac{1}{4t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2(t-2)^2}-\frac{3}{4(t-2)}$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}(t-2)^{-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(t-2)}\text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int_3^4\frac{dt}{t(t-1)(t-2)^2}=\int_3^4\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}(t-2)^{-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(t-2)}\right)dt$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t|+\ln|t-1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-2)^{-1}}{(-1)}-\frac{3}{4}\ln|t-2|\Big|_3^4$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\ln4+\ln3+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{-1}}{(-1)}-\frac{3}{4}\ln2\right)-\left(-\frac{1}{4}\ln3+\ln2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)}-\frac{3}{4}\ln1\right)$$

$$=\frac{-\ln4+5\ln3+1-7\ln2}{4}\approx0.0637\text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_0^1\frac{u\,du}{u^3+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{u}{u^3+1}=\frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2-u+1}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(u+1)$ រួចយក $u=-1$ នាំឱ្យ $A=\frac{-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$ ។

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង u រួចយក $u\to+\infty$ នាំឱ្យ $0=A+B$ នាំឱ្យ $B=-A=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ ។

- យក $u=0$ នាំឱ្យ $A+C=0$ នាំឱ្យ $C=-A=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ ។

យើងបាន $\frac{u}{u^3+1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{u+1}{u^2-u+1}$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2u-1)+3}{u^2-u+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int_0^1 \frac{u\,du}{u^3+1} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) du$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u+1| + \frac{1}{6}\ln|u^2-u+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)}\arctan\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{6}\ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{6}\ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.3735 \text{ ។}$$

ជាសរុប ជំពូកទី២នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រនៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(a_1x+b_1)\,dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ និង $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាននៅក្នុងជំពូកទី៣បន្តទៀត។

ជំពូកទី៣

ប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទាន

(Types of Integrals of Irrational Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៣នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៣.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$ $(a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$ យើងតាង $t = \sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$t^n = ax+b$ និង $nt^{n-1}dt = a\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx = \int \frac{\frac{n}{a}t^{n-1}dt}{t} = \frac{n}{a}\int t^{n-2}\,dt$ ។

$$= \frac{n}{a}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)} + c = \boxed{\frac{n\sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}{(n-1)a} + c} \quad (3.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}}dx$ និង $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{5x+3}}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.1) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}}dx = \frac{2\sqrt{3x+4}}{3}+c$$

និង $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{5x+3}}dx = \frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^2}}{2\cdot 5}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{13^2}-\sqrt[3]{8^2}\right)$$

$$= \frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{169}-4\right) \approx 0.4586 \text{ ។}$$

៣.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$ $(a\neq 0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt[n]{ax+b}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$ យើងតាង $t=\sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$t^n = ax+b$ និង $nt^{n-1}dt = a\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$ ។

នាំឱ្យ $$\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \int t\cdot\frac{n}{a}t^{n-1}dt = \frac{n}{a}\int t^n\,dt$$

$$= \frac{n}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)}+c = \boxed{\frac{n\sqrt[n]{(ax+b)^{n+1}}}{(n+1)a}+c} \qquad (3.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int\sqrt{3x+4}\,dx$ និង $\int_1^2 \sqrt[3]{5x+3}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.2) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{3x+4}\,dx = \frac{2\sqrt{(3x+4)^{2+1}}}{(2+1)\cdot 3}+c = \frac{2\sqrt{(3x+4)^3}}{9}+c$$

និង $$\int_1^2 \sqrt[3]{5x+3}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^4}}{4\cdot 5}\Bigg|_1^2 = \frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{13^4}-\sqrt[3]{8^4}\right)$$

$$= \frac{3}{20}\left(13\sqrt[3]{13}-16\right) \approx 2.1851 \text{ ។}$$

៣.៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$ $(a\neq 0,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ m\in\mathbb{Z})$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$ យើងតាង $t=\sqrt[n]{ax+b}$ នាំឱ្យ

$t^n = ax+b$ និង $nt^{n-1}dt = a\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$ ។

នាំឱ្យ $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int t^m \cdot \frac{n}{a}t^{n-1}dt = \frac{n}{a}\int t^{m+n-1}dt \quad (*)$ ។

បន្ទាប់មក យើងសិក្សាតែករណី $m+n\neq 0$ ។

នាំឱ្យ

$$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \frac{n}{a}\int t^{m+n-1}dt = \frac{n}{a}\cdot\frac{t^{m+n}}{(m+n)}+c$$

$$= \boxed{\frac{n\sqrt[n]{(ax+b)^{m+n}}}{(m+n)a}+c} \qquad (3.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \sqrt{(3x+4)^3}\,dx$ និង $\int_1^2 \sqrt[3]{(5x+3)^4}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.3) យើងបាន៖

$$\int \sqrt{(3x+4)^3}\,dx = \frac{2\sqrt{(3x+4)^{3+2}}}{(3+2)\cdot 3}+c = \frac{2\sqrt{(3x+4)^5}}{15}+c$$

និង $$\int_1^2 \sqrt[3]{(5x+3)^4}\,dx = \left.\frac{3\sqrt[3]{(5x+3)^{4+3}}}{(4+3)\cdot 5}\right|_1^2 = \frac{3}{35}\left(\sqrt[3]{13^7}-\sqrt[3]{8^7}\right)$$

$$= \frac{3}{35}\left(169\sqrt[3]{13}-128\right)\approx 23.0893$$ ។

៣.៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{k-x^2}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}}dx$ យើងអាចតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\,\sin\mathrm{t}\ (\mathrm{k}>0)$ ឬ $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\,\cos\mathrm{t}\ (\mathrm{k}>0)$។

បើយើងតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\,\sin\mathrm{t}\ (\mathrm{k}>0)$ នាំឱ្យ $\mathrm{t}=\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}=\sin^{-1}\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}$ និង $\mathrm{dx}=\sqrt{\mathrm{k}}\cos\mathrm{t}\,\mathrm{dt}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}}dx=\int \frac{\sqrt{k}\cos t\,dt}{\sqrt{k-k\sin^2 t}}=\int \frac{\sqrt{k}\cos t\,dt}{\sqrt{k}\cos t}$

$$=\int dt = t+c=\boxed{\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+c} \qquad (3.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx$ និង $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.4) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+c$$

និង $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(\frac{16}{9}-x^2)}}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{16}{9}}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}-\sin^{-1}0\right)=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3}{4}\approx 0.2826$$ ។

៣.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$ យើងអាចតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\tan \mathrm{t}$ $(\mathrm{k}>0)$ ឬ $\mathrm{t}=\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{k}}$ ។

របៀបទី១ យើងតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\tan \mathrm{t}$ $(\mathrm{k}>0)$ នាំឱ្យ $\mathrm{t}=\arctan\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}=\tan^{-1}\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}$,

$\sec \mathrm{t}=\frac{1}{\cos \mathrm{t}}=\sqrt{1+\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{k}}}=\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{k}}\,/\sqrt{\mathrm{k}}$ និង $\mathrm{dx}=\sqrt{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{dt}}{\cos^2 \mathrm{t}}$ ។

នាំឱ្យ
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{k\tan^2 t+k}}\cdot\frac{\sqrt{k}\,dt}{\cos^2 t}$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{k}\,(1/\cos t)}\cdot\frac{\sqrt{k}\,dt}{\cos^2 t}=\int \frac{\cos t\ dt}{1-\sin^2 t}\ (*)$$ ។

បន្ទាប់មក យើងតាង $\mathrm{u}=\sin \mathrm{t}$ នាំឱ្យ $\mathrm{du}=\cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt}$ និងពីសមីការ $(*)$ ទៅជា៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx=\int \frac{\cos t\ dt}{1-\sin^2 t}=\int \frac{du}{1-u^2}$$
$$=\int \frac{(1+u)+(1-u)}{2(1-u)(1+u)}du=\int\left(\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)du$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1/\cos t+\tan t}{1/\cos t-\tan t}\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+k}/\sqrt{k}+x/\sqrt{k}}{\sqrt{x^2+k}/\sqrt{k}-x/\sqrt{k}}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}-x}\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+k}+x)^2}{x^2+k-x^2}\right|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+c_1$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងតាង $t = x + \sqrt{x^2 + k}$ នាំឱ្យ

$$dt = \left(x + \sqrt{x^2 + k} \right)' dx = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + k}} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + k}}{\sqrt{x^2 + k}} \right) dx = \frac{t}{\sqrt{x^2 + k}} dx$$

និង $\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \boxed{\ln\left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c}$ (3.5) ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$ និង $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16 + 9x^2}} dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.5) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right) + c$$

និង $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16 + 9x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9(\frac{16}{9} + x^2)}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{16}{9}}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left| x + \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} \right| \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left| 1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9}} \right| - \frac{1}{3} \ln\left| 0 + \sqrt{0 + \frac{16}{9}} \right|$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 \approx 0.2310$$ ។

៣.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{x^2-k}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx$ យើងអាចតាង $x = \sqrt{k}\sec t = \frac{\sqrt{k}}{\cos t}$ $(k>0)$ ឬ $t = x+\sqrt{x^2-k}$ ។

របៀបទី១ យើងតាង $x = \sqrt{k}\sec t = \frac{\sqrt{k}}{\cos t}$ $(k>0)$ នាំឱ្យ $\frac{1}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{k}}$,

$t = \arccos\frac{\sqrt{k}}{x} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{k}}{x}$, $\tan t = \frac{\sqrt{x^2-k}}{\sqrt{k}}$ និង $dx = \frac{\sqrt{k}\sin t\, dt}{\cos^2 t}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{k}\tan t}\cdot\frac{\sqrt{k}\sin t\, dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1/\cos t+\tan t}{1/\cos t-\tan t}\right| + c \text{ (តាមផ្នែក ៣.៥)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x/\sqrt{k}+\sqrt{x^2-k}/\sqrt{k}}{x/\sqrt{k}-\sqrt{x^2-k}/\sqrt{k}}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-k}}{x-\sqrt{x^2-k}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+\sqrt{x^2-k})^2}{x^2-x^2+k}\right| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right| + c_1$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងតាង $t = x+\sqrt{x^2-k}$ នាំឱ្យ

$$dt = \left(x+\sqrt{x^2-k}\right)' dx = \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-k}}\right)dx = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-k}}{\sqrt{x^2-k}}\right)dx = \frac{t}{\sqrt{x^2-k}}dx$$

និង $\frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx = \frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx = \boxed{\ln\left| x+\sqrt{x^2-k} \right| + c}$ (3.6) ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}dx$ និង $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}dx = \ln\left| x+\sqrt{x^2-5} \right| + c$$

និង
$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}dx = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{9(x^2-\frac{16}{9})}}dx = \frac{1}{3}\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{16}{9}}}dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left| x+\sqrt{x^2-\frac{16}{9}} \right| \Bigg|_2^4$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left| 4+\sqrt{4^2-\frac{16}{9}} \right| - \frac{1}{3}\ln\left| 2+\sqrt{2^2-\frac{16}{9}} \right|$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} \right) \approx 0.2667 \text{ ។}$$

៣.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{k-x^2}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{k-x^2}\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{k-x^2}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{k-x^2}\,dx$ យើងអាចតាង $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{k}}\sin \mathrm{t}$ $(\mathrm{k}>0)$ ឬ $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{k}}\cos \mathrm{t}$ $(\mathrm{k}>0)$ ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

របៀបទី១ យើងតាង $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{k}}\sin \mathrm{t}$ $(\mathrm{k}>0)$ នាំឱ្យ

$\sin \mathrm{t} = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}$, $\mathrm{t} = \arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}} = \sin^{-1}\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{k}}}$ និង $\mathrm{dx} = \sqrt{\mathrm{k}}\cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt}$ ។

នាំឱ្យ $\int \sqrt{k-x^2}\,dx = \int \sqrt{k-k\sin^2 t}\cdot\sqrt{k}\cos t\,dt = k\int \cos^2 t\,dt$

$$= k\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{k}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$$

$$= \frac{k}{2}\left(t+\frac{1}{2}2\sin t\cos t\right)+c = \frac{k}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+c$$

$$= \frac{k}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{1-\frac{x^2}{k}}\right)+c$$

$$= \frac{k}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

របៀបទី២ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

យើងមាន $\int\sqrt{k-x^2}\,dx = \int\frac{k-x^2}{\sqrt{k-x^2}}\,dx = k\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} - \int\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}\,dx \quad (*)$ ។

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

និង $dv = \frac{x}{\sqrt{k-x^2}}dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int\frac{x}{\sqrt{k-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int(k-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\left(k-x^2\right)$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)} = -\sqrt{k-x^2} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= -x\sqrt{k-x^2}+\int\sqrt{k-x^2}\,dx$$

និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{k-x^2}\,dx = k\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} + x\sqrt{k-x^2} - \int\sqrt{k-x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\int\sqrt{k-x^2}\,dx = k\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} + x\sqrt{k-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int\sqrt{k-x^2}\,dx = \frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2}$$

$$=\frac{k}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int\sqrt{k-x^2}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}x\sqrt{k-x^2}+\frac{k}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+c}$ (3.7) ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int\sqrt{5-x^2}\,dx$ និង $\int_0^1\sqrt{16-9x^2}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.7) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{5-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{5-x^2}+\frac{5}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+c$$

និង $$\int_0^1\sqrt{16-9x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{9(\frac{16}{9}-x^2)}\,dx=3\int_0^1\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}\,dx$$

$$=\left.\frac{3}{2}x\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{16}{9}}}\right|_0^1$$

$$=\left.\frac{3}{2}x\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}+\frac{8}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4}\right|_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}-1}+\frac{8}{3}\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}-\sin^{-1}0\right)$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{8}{3}\sin^{-1}\frac{3}{4}\approx 3.5843$$ ។

៣.៨ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{x^2+k}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$ យើងអាចតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\,\tan\mathrm{t}\ (\mathrm{k}>0)$ ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ឥឡូវនេះ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

យើងមាន $\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\int\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\quad(*)$ ។

យើងយក $u=x$ នាំឱ្យ $du=dx$

និង $dv=\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx$ នាំឱ្យ $v=\int dv=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+k)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+k\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+k)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)}=\sqrt{x^2+k}$$ ។

នាំឱ្យ $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}\,dx$

និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{x^2+k}\,dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}\,dx+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\int\sqrt{x^2+k}\,dx=x\sqrt{x^2+k}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$\Rightarrow\quad \int\sqrt{x^2+k}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\boxed{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+c}$ (3.8) ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int\sqrt{x^2+5}\,dx$ និង $\int_0^1\sqrt{16+9x^2}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.8) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+c$$

និង $$\int_0^1\sqrt{16+9x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{9(\frac{16}{9}+x^2)}\,dx=3\int_0^1\sqrt{x^2+\frac{16}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x\sqrt{x^2+\frac{16}{9}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{16}{9}}\right|\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{16}{9}}+\frac{8}{3}\ln\left|1+\sqrt{1+\frac{16}{9}}\right|-\frac{8}{3}\ln\left|0+\sqrt{0+\frac{16}{9}}\right|$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{8}{3}\ln\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\ln\frac{4}{3}=\frac{5}{2}+\frac{8}{3}\ln 2\approx 4.3483$$ ។

៣.៩ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int\sqrt{x^2-k}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int\sqrt{x^2-k}\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{x^2-k}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{x^2-k}\,dx$ យើងអាចតាង $\mathrm{x}=\sqrt{\mathrm{k}}\sec\mathrm{t}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{k}}}{\cos\mathrm{t}}$ $(\mathrm{k}>0)$ ឬក៏យើងអាចប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ឥឡូវនេះ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

យើងមាន $\int\sqrt{x^2-k}\,dx=\int\dfrac{x^2-k}{\sqrt{x^2-k}}dx=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-k}}dx-k\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-k}}$ $(*)$ ។

យើងយក $u=x$ នាំឱ្យ $du=dx$

និង $dv=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-k}}dx$ នាំឱ្យ $v=\int dv=\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2-k}}dx=\dfrac{1}{2}\int(x^2-k)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2-k\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-k)^{\frac{1}{2}}}{(1/2)}=\sqrt{x^2-k}$$ ។

នាំឱ្យ $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-k}}dx=x\sqrt{x^2-k}-\int\sqrt{x^2-k}\,dx$

និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{x^2-k}\,dx = x\sqrt{x^2-k}-\int\sqrt{x^2-k}\,dx - k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\int\sqrt{x^2-k}\,dx = x\sqrt{x^2-k}-k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k}}$$

$$\Rightarrow\quad \int\sqrt{x^2-k}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-k}-\frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k}}$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-k}-\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right|+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត $\int\sqrt{x^2-k}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-k}-\frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-k}\right|+c}$ (3.9) ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int\sqrt{x^2-5}\,dx$ និង $\int_2^4\sqrt{9x^2-16}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.9) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{x^2-5}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-5}-\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+c$$

និង $$\int_2^4\sqrt{9x^2-16}\,dx = \int_2^4\sqrt{9(x^2-\frac{16}{9})}\,dx = 3\int_2^4\sqrt{x^2-\frac{16}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x\sqrt{x^2-\frac{16}{9}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{16}{9}}\right|\Bigg|_2^4$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{4^2-\frac{16}{9}}-\frac{8}{3}\ln\left|4+\sqrt{4^2-\frac{16}{9}}\right|-\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2^2-\frac{16}{9}}+\frac{8}{3}\ln\left|2+\sqrt{2^2-\frac{16}{9}}\right|$$

$$=16\sqrt{2}-2\sqrt{5}+\frac{8}{3}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{6+4\sqrt{2}}\approx 16.021C$$ ។

៣.១០ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx$ យើងតាង $\mathrm{t}=\sqrt{\mathrm{ax+b}}$

$(\mathrm{a}\neq 0)$ នាំឱ្យ $t^2=ax+b$, $x=\dfrac{t^2-b}{a}$ និង $2t\,dt=a\,dx \Leftrightarrow dx=\dfrac{2}{a}t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx=\int\left[\alpha\left(\frac{t^2-b}{a}\right)+\beta\right]t\cdot\frac{2}{a}t\,dt$

$$=\frac{2}{a^2}\left[\alpha\frac{t^5}{5}+(a\beta-\alpha b)\frac{t^3}{3}\right]+c$$

$$=\frac{2\alpha}{5a^2}t^5+\frac{2(a\beta-\alpha b)}{3a^2}t^3+c$$

$$=\boxed{\frac{2\alpha}{5a^2}\sqrt{(ax+b)^5}+\frac{2(a\beta-\alpha b)}{3a^2}\sqrt{(ax+b)^3}+c} \quad (3.10)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int(6x+5)\sqrt{3x+4}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3.10) យើងបាន៖

$$\int(6x+5)\sqrt{3x+4}\,dx=\frac{2\cdot 6}{5\cdot 3^2}\sqrt{(3x+4)^5}+\frac{2(3\cdot 5-6\cdot 4)}{3\cdot 3^2}\sqrt{(3x+4)^3}+c$$

$$=\frac{4}{15}\sqrt{(3x+4)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(3x+4)^3}+c \text{ ។}$$

៣.១១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\displaystyle\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$

អាំងតេក្រាល $\displaystyle\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$ $(a\neq 0,\ \alpha\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\dfrac{1}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\dfrac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$ យើងតាង $\mathrm{t}=\sqrt{\mathrm{ax+b}}$ នាំឱ្យ

$t^2=ax+b,\ x=\dfrac{t^2-b}{a}$ និង $2t\,dt=a\,dx\Leftrightarrow dx=\dfrac{2}{a}t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $\int\dfrac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}=\int\dfrac{\frac{2t\,dt}{a}}{(\alpha(\frac{t^2-b}{a})+\beta)t}=\dfrac{2}{a}\int\dfrac{dt}{\frac{\alpha t^2-\alpha b+a\beta}{a}}$

- បើ $k=0$ នោះពីសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{\alpha}\int t^{-2}dt$$

$$=\frac{2}{\alpha}\frac{t^{-1}}{(-1)}+c=-\frac{2}{\alpha t}+c=\boxed{-\frac{2}{\alpha\sqrt{ax+b}}+c}\quad(3.11)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $k>0$ នោះពីសមីការ $(*)$ និងតាមផ្នែក ១.២.៣ នាំឱ្យ

$$\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{k})^2}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)+c$$

$$=\boxed{\frac{2}{\alpha\sqrt{k}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{k}}\right)+c}\quad(3.12)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $k<0$ នោះពីសមីការ $(*)$ និងតាមផ្នែក ១.២.៣ នាំឱ្យ

$$\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2-(\sqrt{-k})^2}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-k}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{-k}}{t+\sqrt{-k}}\right|+c$$

$$=\boxed{\frac{1}{\alpha\sqrt{-k}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{-k}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{-k}}\right|+c}\quad(3.13)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$, $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}}$ និង $\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$ មាន $k=\frac{a\beta-\alpha b}{\alpha}=\frac{2(3)-2(3)}{2}=0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.11) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}=-\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}+c=-\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+c$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}}$ មាន $k=\frac{a\beta-\alpha b}{\alpha}=\frac{4(5)-2(3)}{2}=7>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.12) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{4x+3}}=\frac{2}{2\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7}}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7}}\right)+c$$

និងចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}}$ មាន

$$k=\frac{a\beta-\alpha b}{\alpha}=\frac{2(3)-4(5)}{4}=-3.5<0 \text{ ។}$$

នោះតាមរូបមន្ត (3.13) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{4\sqrt{3.5}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{3.5}}\right|+c \text{ ។}$$

៣.១២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។ អនុគមន៍នេះមានត្រីធា ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta = b^2 - 4ac$ ដើម្បីស្វែងរកឫសនៃត្រីធានេះ។

១. ករណី $\Delta = 0$ នោះត្រីធាមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $\mathrm{a}x^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, $\sqrt{\mathrm{a}x^2 + bx + c} = \sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|$ $(a > 0)$ និង

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{a}x^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|x + \frac{b}{2a}\right| + c_1$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} \ln|2ax + b| + c_2} \qquad (3.14)$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

២. ករណី $\Delta > 0$ នោះត្រីធាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $\mathrm{a}x^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

និងយើងតាង $t = x + \dfrac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{a}x^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \right| + c_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right| + c_1$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right|+c_2} \quad (3.15)$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a>0$ ។

- ប្រសិនបើ $a<0$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{a}x^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)+c_1} \quad (3.16)$$

ដែល $|2ax+b|<\sqrt{\Delta}$, c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a<0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta<0$ នោះត្រីធាគ្មានឫសចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីធាអាចសរសេរជា

$$\mathrm{a}x^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

និងយើងតាង $t=x+\frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx=dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a>0$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{a}x^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\right|+c_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}\right|+c_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right|+c_2$$

(ដូចគ្នានឹងរូបមន្ត (3.15))

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a>0$ ។

- ប្រសិនបើ $a<0$ នាំឱ្យ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]<0$ នោះយើងមិនអាចគណនា អាំងតេក្រាលប្រភេទនេះបានទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-8}}$ និង $\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2-4x+4}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ មាន $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(1)=0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.14) យើងបាន៖

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+1}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\ln|2\cdot4x+4|+c_2=\frac{1}{2}\ln|8x+4|+c_2 \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ មាន $a=4>0,\ \Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(3)$ $=-32<0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.15) យើងបាន៖

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\ln\left|2\cdot4x+4+2\sqrt{4\left(4x^2+4x+3\right)}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|8x+4+4\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+c_2 \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-8}}$ មាន $a=4>0,\ \Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(-8)$ $=144>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.15) យើងបាន៖

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-8}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\ln\left|2\cdot4x+4+2\sqrt{4\left(4x^2+4x-8\right)}\right|+c_2$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-4x+4}}$ មាន $a=-4<0, \Delta=(-4)^2-4(-4)(4)$
$=80>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.16) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-4x+4}} = \frac{1}{\sqrt{-(-4)}}\sin^{-1}\left(\frac{2(-4)x+(-4)}{\sqrt{80}}\right)+c_1$$

៣.១៣ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ $(a\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។ អនុគមន៍នេះមានត្រីជា ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ ។

យើងនឹងសិក្សាតាម $\Delta=b^2-4ac$ ដើម្បីស្វែងរកឫសនៃត្រីជានេះ។

១. ករណី $\Delta=0$ នោះត្រីជាមានឫសឌុបគឺ $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ $(a>0)$ និង

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\left(x+\frac{b}{2a}\right)dx=\sqrt{a}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{b}{2a}x\right)+c_1$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{a}}{2}x^2+\frac{b\sqrt{a}}{2a}x+c_1} \qquad (3.17)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a>0$ ។

២. ករណី $\Delta>0$ នោះត្រីជាមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ឬ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

និងយើងតាង $t = x + \dfrac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx = dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a > 0$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{a}\int\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\,dx = \sqrt{a}\int\sqrt{t^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2}(x+\frac{b}{2a})\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{\Delta}{4a^2}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\right| + c_1$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2}(x+\frac{b}{2a})\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}} - \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}\right| + c_1$$

$$= \boxed{\frac{(2ax+b)\sqrt{a}}{4a^2}\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)} - \frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right| + c_2} \quad (3.18)$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a > 0$ ។

- ប្រសិនបើ $a < 0$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{-a}\int\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{-a}}{2}t\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}-t^2} + \frac{\sqrt{-a}}{2}\cdot\frac{\Delta}{4a^2}\sin^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{\Delta}/2a}\right) + c_1$$ (តាម (3.7))

$$= \frac{\sqrt{-a}}{2}(x+\frac{b}{2a})\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}-(x+\frac{b}{2a})^2} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2}\sin^{-1}\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\Delta}/2a}\right) + c_1$$

$$= \frac{(2ax+b)\sqrt{-a}}{4a}\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{-a}} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + c_1$$

$$= \boxed{\frac{(2ax+b)\sqrt{-a}}{4a^2}\sqrt{-a(ax^2+bx+c)} + \frac{\Delta\sqrt{-a}}{8a^2}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + c_1} \quad (3.19)$$

ដែល $|2ax+b| < \sqrt{\Delta}$, c_1 ជាចំនួនថេរ និង $a < 0$ ។

៣. ប្រសិនបើ $\Delta < 0$ នោះត្រីធាគ្មានឫសចំនួនពិតទេ។ នាំឱ្យត្រីធាអាចសរសេរជា

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

និងយើងតាង $t=x+\dfrac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dx=dt$ ។

- ប្រសិនបើ $a>0$ នាំឱ្យ

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}t\sqrt{t^2-\frac{\Delta}{4a^2}}+\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot(-\frac{\Delta}{4a^2})\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\right|+c_1 \quad \text{(តាម (3.8))}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}(x+\frac{b}{2a})\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}-\frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}\right|+c_1$$

$$=\frac{(2ax+b)\sqrt{a}}{4a^2}\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}-\frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right|+c_2$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនថេរ និង $a>0$ (ដូចគ្នានឹងរូបមន្ត (3.18))។

- ប្រសិនបើ $a<0$ នាំឱ្យ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]<0$ នោះយើងមិនអាចគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះបានទេ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int\sqrt{4x^2+4x+1}\,dx$, $\int\sqrt{4x^2+4x+3}\,dx$, $\int\sqrt{4x^2+4x-8}\,dx$

និង $\int\sqrt{-4x^2-4x+4}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{4x^2+4x+1}\,dx$ មាន $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(1)=0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.17) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{4x^2+4x+1}\,dx=\frac{\sqrt{4}}{2}x^2+\frac{4\sqrt{4}}{2\cdot 4}x+c_1=x^2+x+c_1 \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{4x^2+4x+3}\,dx$ មាន $a=4>0,\ \Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(3)$

$=-32<0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.18) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{4x^2+4x+3}\,dx=\frac{(2\cdot 4x+4)\sqrt{4}}{4\cdot 4^2}\sqrt{4\left(4x^2+4x+3\right)}$$

$$-\frac{\Delta\sqrt{4}}{8\cdot 4^2}\ln\left|\,2\cdot 4x+4+2\sqrt{4\left(4x^2+4x+3\right)}\,\right|+c_2$$

$$=\frac{(8x+4)}{16}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left|8x+4+4\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+c_2 \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{4x^2+4x-8}\,dx$ មាន $a=4>0,\ \Delta=b^2-4ac=4^2-4(4)(-8)$

$=144>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.18) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{4x^2+4x-8}\,dx=\frac{(2\cdot 4x+4)\sqrt{4}}{4\cdot 4^2}\sqrt{4\left(4x^2+4x-8\right)}$$

$$-\frac{\Delta\sqrt{4}}{8\cdot 4^2}\ln\left|\,2\cdot 4x+4+2\sqrt{4\left(4x^2+4x-8\right)}\,\right|+c_2$$

$$=\frac{(8x+4)}{16}\sqrt{4x^2+4x-8}-\frac{9}{4}\ln\left|8x+4+4\sqrt{4x^2+4x-8}\right|+c_2 \text{ ។}$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\sqrt{-4x^2-4x+4}\,dx$ មាន $a=-4<0,\ \Delta=(-4)^2-4(-4)(4)$

$=80>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.19) យើងបាន៖

$$\int\sqrt{-4x^2-4x+4}\,dx=\frac{(2(-4)x-4)\sqrt{4}}{4(-4)^2}\sqrt{4(-4x^2-4x+4)}$$

$$+\frac{80\sqrt{4}}{8(-4)^2}\sin^{-1}\left(\frac{2(-4)x-4}{\sqrt{80}}\right)+c_1$$

$$=\frac{(-8x-4)}{16}\sqrt{-4x^2-4x+4}+\frac{5}{4}\sin^{-1}\left(\frac{-8x-4}{4\sqrt{5}}\right)+c_1 \text{ ។}$$

៣.១៤ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានរាង $\int\frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{a x^2+bx+c}}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{(\alpha x+\beta)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ជាអនុគមន៍អសនិទាន។

យើងមាន $\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

នាំឱ្យ $\alpha x+\beta=A(2ax+b)+B=2aAx+bA+B$

នាំឱ្យ $2aA=\alpha\ ,\ Ab+B=\beta\Rightarrow A=\frac{\alpha}{2a}\ ,\ B=\beta-Ab=\frac{2a\beta-\alpha b}{2a}$ ។

នាំឱ្យ $\int\frac{(\alpha x+\beta)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=A\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$=A\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c)+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=\boxed{\frac{\alpha}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{(2a\beta-\alpha b)}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}\qquad(3.20)$$

ដែលអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ អាចគណនាបានតាមផ្នែក ៣.១២ (រូបមន្ត (3.14) , (3.15) និង (3.16))។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$ និង $\int\frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$ មាន $\alpha=3,\ \beta=5,\ a=1>0,\ \Delta=b^2-4ac$ $=2^2-4(1)(4)=-12<0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.20) និង (3.15) យើងបាន៖

$$\int\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx=\frac{3}{1}\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{(2\cdot1\cdot5-3\cdot2)}{2\cdot1}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+4}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{2}{\sqrt{1}}\ln\left|2x+2+2\sqrt{1\cdot\left(x^2+2x+4\right)}\right|+c_2$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int\frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}}dx$ មាន $\alpha=5,\ \beta=-3,\ a=-4<0,$

$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4(-4)(7)=256>0$ ។

នោះតាមរូបមន្ត (3.20) និង (3.16) យើងបាន៖

$$\int\frac{5x-3}{\sqrt{-4x^2-12x+7}}dx=\frac{5}{-4}\sqrt{-4x^2-12x+7}+\frac{(2(-4)(-3)-5(-12))}{2(-4)}\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x+7}}$$

$$=-\frac{5}{4}\sqrt{-4x^2-12x+7}-\frac{21}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-4x^2-12x+7}}$$

$$=-\frac{5}{4}\sqrt{-4x^2-12x+7}-\frac{21}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}\sin^{-1}\left(\frac{2(-4)x-12}{\sqrt{256}}\right)+c_1$$

$$=-\frac{5}{4}\sqrt{-4x^2-12x+7}-\frac{21}{4}\sin^{-1}\left(\frac{-8x-12}{16}\right)+c_1$$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី៣នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx$, $\int\sqrt[n]{ax+b}\ dx$, $\int\sqrt[n]{(ax+b)^m}\ dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{k-x^2}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-k}}dx$, $\int\sqrt{k-x^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$, $\int\sqrt{x^2-k}\,dx$, $\int(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx$, $\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ និង $\int\frac{(\alpha x+\beta)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុងជំពូកទី៤បន្តទៀត។

ជំពូកទី៤

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

(Types of Integrals Involving Exponential Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៤នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៤.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $a^{\alpha x+\beta}$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$ យើងប្រើវិធីប្ដូរអថេរដោយតាង

$t=a^{\alpha x+\beta}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $\ln t=\ln a^{\alpha x+\beta}=(\alpha x+\beta)\ln a$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{1}{\alpha}(\dfrac{\ln t}{\ln a}-\beta)$ និង $dx=\dfrac{1}{\alpha\ln a}\cdot\dfrac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx=\int t\dfrac{1}{\alpha\ln a}\,\dfrac{dt}{t}=\dfrac{1}{\alpha\ln a}\int dt$

$$=\frac{1}{\alpha\ln a}\,t+c=\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha\ln a}+c\quad(*)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e\,,\,\alpha=1\,,\,\beta=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int e^x\,dx=\boxed{e^x+c}\qquad(4.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $\alpha=1\,,\,\beta=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int a^x\,dx=\boxed{\frac{a^x}{\ln a}+c}\qquad(4.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int e^{\alpha x+\beta}\,dx=\boxed{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}+c} \qquad (4.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ចំពោះករណីទូទៅ តាមសមីការ $(*)$ ផ្តល់ឱ្យ

$$\int a^{\alpha x+\beta}\,dx=\boxed{\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha\ln a}+c} \qquad (4.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int 3e^{x}\,dx$, $\int\sqrt{2}\cdot 3^{x}\,dx$, $\int_{0}^{(1/7)\ln 2}14e^{7x}\,dx$, $\int 7^{2x+3}\,dx$ និង $\int\left(3^{4x+5}\right)^{6}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.1) , (4.2) , (4.3) និង (4.4) យើងបាន៖

$$\int 3e^{x}\,dx=3\int e^{x}\,dx=3e^{x}+c$$

$$\int\sqrt{2}\cdot 3^{x}\,dx=\sqrt{2}\int 3^{x}\,dx=\sqrt{2}\cdot\frac{3^{x}}{\ln 3}+c$$

$$\int_{0}^{(1/7)\ln 2}14e^{7x}\,dx=14\int_{0}^{(1/7)\ln 2}e^{7x}\,dx=14\cdot\left.\frac{e^{7x}}{7}\right|_{0}^{(1/7)\ln 2}$$

$$=2\left(e^{7(1/7)\ln 2}-e^{0}\right)=2(2-1)=2$$

$$\int 7^{2x+3}\,dx=\frac{7^{2x+3}}{2\ln 7}+c$$

និង $\int\left(3^{4x+5}\right)^{6}dx=\int 3^{6(4x+5)}\,dx=\int 3^{24x+30}\,dx=\dfrac{3^{24x+30}}{24\ln 3}+c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_{0}^{1}e^{x\cdot\ln a+(1-x)\cdot\ln b}\,dx$ $(a>0\,,\,b>0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $e^{x\cdot\ln a+(1-x)\cdot\ln b}=e^{\ln a^{x}+\ln b^{1-x}}=e^{\ln(a^{x}b^{1-x})}$

$$= a^x b^{1-x} = \frac{a^x}{b^x} b = \left(\frac{a}{b}\right)^x b \quad (*) \text{ ។}$$

- បើ $a = b$ និងពីសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int_0^1 e^{x\cdot\ln a + (1-x)\cdot\ln b}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{b}{b}\right)^x b\, dx = b\int_0^1 dx = b\,x + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a \neq b$ និងពីសមីការ $(*)$ និងរូបមន្ត (2) យើងបាន៖

$$\int_0^1 e^{x\cdot\ln a + (1-x)\cdot\ln b}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x b\, dx = b\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x dx$$

ដូចនេះ ចំពោះ $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ យើងបានរូបមន្ត

$$\int_0^1 e^{x\cdot\ln a + (1-x)\cdot\ln b}\, dx = \int_0^1 a^x b^{1-x}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^x b\, dx = \boxed{\frac{a-b}{\ln a - \ln b}} \quad (4.5) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (3) និង $a \neq 0$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{a\,x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a} e^{a\,x}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\left(e^{a\,b} - 1\right) \quad (*) \text{ ។}$$

ប្រសិនបើ $a = x + i\,y \in \mathbb{C}$ ដែល $\mathrm{Re}(a) = x < 0$ នាំឱ្យ

$$\lim_{b\to+\infty} e^{a\,b} = \lim_{b\to+\infty} e^{(x+i\,y)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{xb + i\,yb}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{\cos yb + i\sin yb}{e^{-xb}}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{\cos yb}{e^{-xb}} + i\lim_{b\to+\infty}\frac{\sin yb}{e^{-xb}} = 0 + i\cdot 0 = 0$$

និងតាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\left(e^{a\,b} - 1\right) = \frac{1}{a}(0-1) = \boxed{-\frac{1}{a}} \quad (4.6)$$

ដែល $\mathrm{Re}(a) < 0$ ។

យើងអាចទាញបាន

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \boxed{\frac{1}{a}} \quad (4.7)$$

ដែល $-\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(-a) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(a) > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int_0^1 e^{x\cdot\ln 7+(1-x)\cdot\ln 9}\,dx$ និង $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.5) និង (4.7) យើងបាន៖

$$\int_0^1 e^{x\cdot\ln 7+(1-x)\cdot\ln 9}\,dx = \frac{7-9}{\ln 7-\ln 9} = \frac{-2}{\ln 7-\ln 9}$$

និង $$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int e^{5x}\left(\frac{e^{2x}}{7}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx$, $\int (e^{4x}-e^{-4x})^2\,dx$ និង $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$\int e^{5x}\left(\frac{e^{2x}}{7}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx = \int\left(\frac{e^{7x}}{7}+3e^{2x}\right)dx = \frac{1}{7}\int e^{7x}\,dx + 3\int e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{e^{7x}}{7} + 3\cdot\frac{e^{2x}}{2} + c = \frac{1}{49}e^{7x} + \frac{3}{2}e^{2x} + c$$ (តាមរូបមន្ត (4.3))

$$\int (e^{4x}-e^{-4x})^2\,dx = \int [(e^{4x})^2 - 2(e^{4x})(e^{-4x}) + (e^{-4x})^2]\,dx$$

និង $$\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x}\,dx = \int_0^1 [(3/5)^x + (4/5)^x]\,dx$$

$$= \left[\frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)} + \frac{(4/5)^x}{\ln(4/5)}\right]\Bigg|_0^1$$ (តាមរូបមន្ត (4.2))

$$= \left[\frac{3/5}{\ln(3/5)} + \frac{4/5}{\ln(4/5)}\right] - \left[\frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)}\right]$$

$$= \frac{(3/5)-1}{\ln(3/5)} + \frac{(4/5)-1}{\ln(4/5)} = -\frac{2}{5\ln(3/5)} - \frac{1}{5\ln(4/5)}$$ ។

៤.២ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$ $(a>0\,,\, a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{p+a^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង $t=p+a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $x=\frac{\ln(t-p)}{\alpha\ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}=\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t(t-p)}dt$ $(*)$ ។

- បើ $p=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}=\int\frac{dx}{a^{\alpha x}}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{\alpha\ln a}\int t^{-2}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{t^{-1}}{(-1)}+c=\frac{-1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{t}+c=\boxed{\frac{-1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{a^{\alpha x}}+c} \quad (4.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\, a\neq 1\,,\,\alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+a^{\alpha x}}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t(t-p)}dt=\frac{1}{\alpha\, p\ln a}\int\frac{t-(t-p)}{t(t-p)}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\, p\ln a}\int\left(\frac{1}{t-p}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{\alpha\, p\ln a}\left(\ln|t-p|-\ln|t|\right)+c$$

$$=\frac{1}{\alpha\, p\ln a}\left(\alpha x\ln a-\ln\left|p+a^{\alpha x}\right|\right)+c_1$$

$$=\boxed{\frac{x}{p}-\frac{1}{\alpha\, p\ln a}\ln\left|p+a^{\alpha x}\right|+c_1} \quad (4.9)$$

ដែល $c\,,\, c_1$ ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\, a\neq 1\,,\,\alpha\neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (4.9) ទៅជា

$$\int\frac{dx}{p+e^{\alpha x}}=\boxed{\frac{x}{p}-\frac{1}{\alpha\, p}\ln\left|p+e^{\alpha x}\right|+c_1} \quad (4.10)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \frac{dx}{3\cdot 7^{2x}}$, $\int \frac{dx}{3+e^{6x}}$ និង $\int \frac{dx}{7-5^{4x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.8) , (4.10) និង (4.9) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{3\cdot 7^{2x}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{7^{2x}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2\ln 7}\cdot\frac{1}{7^{2x}} + c = \frac{-1}{6\ln 7}\cdot\frac{1}{7^{2x}} + c$$

$$\int \frac{dx}{3+e^{6x}} = \frac{x}{3} - \frac{1}{6\cdot 3}\ln\left|3+e^{6x}\right| + c = \frac{x}{3} - \frac{1}{18}\ln\left|3+e^{6x}\right| + c$$

និង $$\int \frac{dx}{7-5^{4x}} = -\int \frac{dx}{-7+5^{4x}} = -\left[\frac{x}{-7} - \frac{1}{4\cdot(-7)\ln 5}\ln\left|-7+5^{4x}\right|\right] + c$$

$$= \frac{x}{7} - \frac{1}{28\ln 5}\ln\left|7-5^{4x}\right| + c$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{8+6^{3e^{2x}}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t = e^{2x}$ នាំឱ្យ $dt = 2e^{2x}\,dx \Leftrightarrow e^{2x}dx = \frac{dt}{2}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $x=0$ នាំឱ្យ $t=1$ និង បើ $x=1$ នាំឱ្យ $t=e^2$ ។

នាំឱ្យ $$\int_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{8+6^{3e^{2x}}} = \int_1^{e^2} \frac{\frac{dt}{2}}{8+6^{3t}} = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{dt}{8+6^{3t}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{8} - \frac{1}{3(8)\ln 6}\ln\left|8+6^{3t}\right|\right]\Bigg|_1^{e^2}$$ (តាមរូបមន្ត (4.9))

$$= \left(\frac{e^2}{16} - \frac{1}{48\ln 6}\ln(8+6^{3e^2})\right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48\ln 6}\ln(224)\right)$$

$$= \frac{e^2-1}{16} + \frac{\ln 224 - \ln(8+6^{3e^2})}{48\ln 6}$$ ។

៤.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$ $(a>0\ ,\ a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{(p+a^{\alpha x})^2}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}$ យើងតាង $t=p+a^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$

នាំឱ្យ $x=\frac{\ln(t-p)}{\alpha \ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha \ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}=\int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\alpha \ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}=\frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t^2(t-p)}dt$ $(*)$ ។

- បើ $p=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}=\int \frac{dx}{(a^{\alpha x})^2}=\frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha \ln a}\int t^{-3}dt \ =\frac{1}{\alpha \ln a}\cdot\frac{t^{-2}}{(-2)}+c$$

$$=\frac{-1}{2\alpha \ln a}\cdot\frac{1}{t^2}+c=\frac{-1}{2\alpha \ln a}\cdot\frac{1}{(a^{\alpha x})^2}+c$$

$$=\boxed{\frac{-1}{2\alpha \ln a}\cdot\frac{1}{a^{2\alpha x}}+c} \quad (4.11)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\ ,\ a\neq 1\ ,\ \alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+a^{\alpha x})^2}=\frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t^2(t-p)}dt=\frac{1}{\alpha\, p \ln a}\int \frac{t-(t-p)}{t^2(t-p)}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\, p \ln a}\int \frac{1}{t(t-p)}dt-\frac{1}{\alpha\, p \ln a}\int \frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\, p^2 \ln a}\int\left(\frac{1}{t-p}-\frac{1}{t}\right)dt-\frac{1}{\alpha\, p \ln a}\int t^{-2}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha p^2\ln a}\left(\ln|t-p|-\ln|t|\right)-\frac{1}{\alpha p\ln a}\cdot\frac{t^{-1}}{(-1)}+c$$

$$=\frac{1}{\alpha p^2\ln a}\left(\ln\left|p+a^{\alpha x}-p\right|-\ln\left|p+a^{\alpha x}\right|\right)$$

$$-\frac{1}{\alpha p\ln a}\cdot\frac{1}{(p+a^{\alpha x})}+c$$

$$=\frac{1}{\alpha p^2\ln a}\left(\alpha x\ln a-\ln\left|p+a^{\alpha x}\right|\right)+\frac{1}{\alpha p\ln a(p+a^{\alpha x})}+c_1$$

$$=\boxed{\frac{x}{p^2}-\frac{1}{\alpha p^2\ln a}\ln\left|p+a^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha p\ln a(p+a^{\alpha x})}+c_1}\quad(4.12)$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (4.12) ទៅជា

$$\int\frac{dx}{(p+e^{\alpha x})^2}=\boxed{\frac{x}{p^2}-\frac{1}{\alpha p^2}\ln\left|p+e^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha p(p+e^{\alpha x})}+c_1}\quad(4.13)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int\frac{dx}{(3\cdot 7^{2x})^2}$ និង $\int\frac{dx}{(3+e^{6x})^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.11) និង (4.13) យើងបាន៖

$$\int\frac{dx}{(3\cdot 7^{2x})^2}=\frac{1}{3^2}\int\frac{dx}{(7^{2x})^2}=\frac{1}{9}\left[\frac{-1}{2\cdot 2\ln 7}\cdot\frac{1}{7^{2\cdot 2x}}\right]+c=\frac{-1}{36\ln 7}\cdot\frac{1}{7^{4x}}+c$$

និង
$$\int\frac{dx}{(3+e^{6x})^2}=\frac{x}{3^2}-\frac{1}{6\cdot 3^2}\ln\left|3+e^{6x}\right|+\frac{1}{6\cdot 3(3+e^{6x})}+c$$

$$=\frac{x}{9}-\frac{1}{54}\ln\left|3+e^{6x}\right|+\frac{1}{18(3+e^{6x})}+c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int_0^2\frac{t^2\,dt}{(2+e^{4t^3})^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x=t^3$ នាំឱ្យ $dx=3t^2\,dt \Leftrightarrow t^2\,dt=\frac{dx}{3}$ ។ ពិនិត្យគោល៖ បើ $t=0$ នាំឱ្យ $x=0$ និង បើ $t=2$ នាំឱ្យ $x=2^3=8$ ។ នាំឱ្យ

$$\int_0^2 \frac{t^2\,dt}{(2+e^{4t^3})^2}=\int_0^8 \frac{\frac{dx}{3}}{(2+e^{4x})^2}=\frac{1}{3}\int_0^8 \frac{dx}{(2+e^{4x})^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x}{2^2}-\frac{1}{4(2^2)}\ln\left|2+e^{4x}\right|+\frac{1}{4(2)(2+e^{4x})}\right]\Bigg|_0^8 \text{ (តាមរូបមន្ត (4.13))}$$

$$=(\frac{8}{12}-\frac{1}{48}\ln(2+e^{32})+\frac{1}{24(2+e^{32})})-(0-\frac{1}{48}\ln 3+\frac{1}{72})$$

$$=\frac{47}{72}+\frac{1}{48}\ln(\frac{3}{2+e^{32}})+\frac{1}{24(2+e^{32})}\approx 0.008998 \text{ ។}$$

៤.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{a^{2\alpha x}}{p+q\,a^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ និង $a^{2\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$ យើងតាង $t=p+q\,a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $a^{\alpha x}=\frac{t-p}{q}$, $x=\frac{\ln(t-p)-\ln q}{\alpha\ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $$\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}=\int \frac{(a^{\alpha x})^2\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}=\int \frac{[(t-p)/q]^2}{t}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\int \frac{(t-p)}{t}dt \quad (*) \text{ ។}$$

- បើ $p=0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}=\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{q\,a^{\alpha x}}=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\int \frac{(t-0)}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\int dt=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\cdot t+c$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\cdot q a^{\alpha x}+c=\boxed{\frac{1}{\alpha q\ln a}\cdot a^{\alpha x}+c}\quad(4.14)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int\frac{a^{2\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}}=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\int\frac{(t-p)}{t}dt=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\int\left(1-\frac{p}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\left(t-p\ln|t|\right)+c$$

$$=\frac{1}{\alpha q^2\ln a}\left(p+qa^{\alpha x}-p\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|\right)+c$$

$$=\boxed{\frac{a^{\alpha x}}{\alpha q\ln a}-\frac{p}{\alpha q^2\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c_1}\quad(4.15)$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (15) ទៅជា

$$\int\frac{a^{2\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}}=\boxed{\frac{a^{\alpha x}}{\alpha q}-\frac{p}{\alpha q^2}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c_1}\quad(4.16)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int\frac{7^{4x}dx}{3\cdot 7^{2x}}$, $\int\frac{e^{12x}dx}{3+4\cdot e^{6x}}$ និង $\int\frac{5^{8x}dx}{7-6\cdot 5^{4x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.14) , (4.16) និង (4.15) យើងបាន៖

$$\int\frac{7^{4x}dx}{3\cdot 7^{2x}}=\frac{1}{2\cdot 3\ln 7}\cdot 7^{2x}+c=\frac{1}{6\ln 7}\cdot 7^{2x}+c$$

$$\int\frac{e^{12x}dx}{3+4\cdot e^{6x}}=\frac{e^{6x}}{6\cdot 4}-\frac{3}{6\cdot 4^2}\ln\left|3+4\cdot e^{6x}\right|+c_1$$

$$=\frac{e^{6x}}{24}-\frac{1}{32}\ln\left|3+4\cdot e^{6x}\right|+c_1$$

និង $$\int\frac{5^{8x}\,dx}{7-6\cdot 5^{4x}}=\frac{5^{4x}}{4(-6)}-\frac{7}{4(-6)^2}\ln\left|7-6\cdot 5^{4x}\right|+c_1$$

$$=-\frac{5^{4x}}{24}-\frac{7}{144}\ln\left|7-6\cdot 5^{4x}\right|+c_1$$ ។

៤.៥ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int\frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ និង $a^{-\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$ យើងតាង $t=a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$

នាំឱ្យ $dt=\alpha a^{\alpha x}\ln a\,dx$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $$\int\frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}=\int\frac{1}{pt+\frac{q}{t}}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{dt}{pt^2+q}\quad(*)$$ ។

- បើ $pq>0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int\frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}=\frac{1}{\alpha p\ln a}\int\frac{dt}{t^2+\frac{q}{p}}$$

$$=\frac{1}{\alpha p\ln a}\cdot\frac{1}{\sqrt{q/p}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{q/p}}\right)+c$$

$$=\boxed{\frac{1}{\alpha\sqrt{pq}\ln a}\tan^{-1}\left(\sqrt{p/q}\;a^{\alpha x}\right)+c}\qquad(4.17)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\,a\neq 1\,,\,\alpha\neq 0$ ។

ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (4.17) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{pe^{\alpha x}+qe^{-\alpha x}} = \boxed{\frac{1}{\alpha\sqrt{pq}}\tan^{-1}\left(\sqrt{p/q}\; e^{\alpha x}\right)+c} \quad (4.18)$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $pq<0 \Leftrightarrow -pq>0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}} = \frac{1}{\alpha p \ln a}\int \frac{dt}{t^2+\dfrac{q}{p}} = \frac{1}{\alpha p \ln a}\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{-q/p})^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha p \ln a}\cdot \frac{1}{2\sqrt{-q/p}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{-q/p}}{t+\sqrt{-q/p}}\right|+c$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\alpha\sqrt{-pq}\ln a}\ln\left|\frac{a^{\alpha x}-\sqrt{-q/p}}{a^{\alpha x}+\sqrt{-q/p}}\right|+c} \quad (4.19)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0, a\neq 1, \alpha\neq 0$ ។

ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ (4.19) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{pe^{\alpha x}+qe^{-\alpha x}} = \boxed{\frac{1}{2\alpha\sqrt{-pq}}\ln\left|\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{-q/p}}{e^{\alpha x}+\sqrt{-q/p}}\right|+c} \quad (4.20)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{3e^{2x}+4e^{-2x}}$, $\int \frac{dx}{3e^{2x}-4e^{-2x}}$, $\int \frac{dx}{3\cdot 5^{6x}+4\cdot 5^{-6x}}$

និង $\int \frac{dx}{-3\cdot 5^{6x}+4\cdot 5^{-6x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.18) , (4.20) , (4.17) និង (4.19) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{3e^{2x}+4e^{-2x}} = \frac{1}{2\sqrt{3\cdot 4}}\tan^{-1}\left(\sqrt{3/4}\; e^{2x}\right)+c$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2x}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{3e^{2x}-4e^{-2x}} = \frac{1}{2\cdot 2\sqrt{-3(-4)}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{-(-4)/3}}{e^{2x}+\sqrt{-(-4)/3}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^{2x}-2/\sqrt{3}}{e^{2x}+2/\sqrt{3}}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{3\cdot 5^{6x}+4\cdot 5^{-6x}}=\frac{1}{6\sqrt{3\cdot 4}\ln 5}\tan^{-1}\left(\sqrt{3/4}\,5^{6x}\right)+c$$

$$=\frac{1}{12\sqrt{3}\ln 5}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}5^{6x}\right)+c$$

និង $$\int\frac{dx}{-3\cdot 5^{6x}+4\cdot 5^{-6x}}=\frac{1}{2\cdot 6\sqrt{-(-3)\cdot 4}\ln 5}\ln\left|\frac{5^{6x}-\sqrt{-4/(-3)}}{5^{6x}+\sqrt{-4/(-3)}}\right|+c$$

៤.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx\ (a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល e^{-ax^2} ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ឥឡូវនេះ យើងតាង

$I(a)=\int_{0}^{+\infty}e^{-ax^2}dx\ (a>0)$ ។

នាំឱ្យ $$(I(a))^2=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx\int_0^{+\infty}e^{-ay^2}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-a(x^2+y^2)}dxdy\quad(*)$$ ។

តាង $y=xt\,,\,t>0$ នាំឱ្យ $dy=x\,dt\,,\,t>0$ និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$(I(a))^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-a(x^2+x^2t^2)}x\,dxdt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-a(1+t^2)x^2}x\,dxdt\quad(*_1)$$ ។

តាង $u=-a(1+t^2)x^2$ នាំឱ្យ $du=-2a(1+t^2)x\,dx\Rightarrow x\,dx=-\frac{du}{2a(1+t^2)}$ និងតាមសមីការ $(*_1)$ នាំឱ្យ

$$(I(a))^2=-\int_0^{+\infty}\int_0^{-\infty}e^u\frac{du}{2a(1+t^2)}dt=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\int_0^{-\infty}\frac{e^u}{1+t^2}du\,dt$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{1+t^2}\Bigg|_0^{-\infty} dt = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\tan^{-1}(t)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4a}$$

នាំឱ្យ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$ (4.21)

និង $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$ (4.22)

ដែល $a>0$ ។

ឥឡូវនេះ យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$ និង $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$ ។

យើងតាង $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ នាំឱ្យ $dt=\dfrac{dx}{\sigma} \Leftrightarrow dx=\sigma\, dt$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}\sigma\, dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ (4.23) (តាមរូបមន្ត (4.21))

និង $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}\sigma\, dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/2}}=\boxed{1} \quad (4.24)$$ (តាមរូបមន្ត (4.22))។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2}dx$, $\int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{2}\right)^2}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{3}\right)^2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.21) , (4.22) , (4.23) និង (4.24) យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3}x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{9}}=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\int_5^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2\pi}=\sqrt{2\pi}$$

និង $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{3}\right)^2}dx=3\sqrt{2\pi}$$ ។

៤.៧ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$ $(a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $e^{-(ax^2+bx+c)}$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

យើងមាន

$$-(ax^2+bx+c)=-a(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a})=-a(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})$$

នាំឱ្យ $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}dx$$

$$= e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} d(x+\frac{b}{2a})$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}} \quad (4.25) \quad \text{(តាមរូបមន្ត (4.22))។}$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងបាន

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-2bx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+b/a)^2+b^2/a}\,dx$$

ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$ យើងតាង $u = x+\frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $du = dx$ ។

នាំឱ្យ $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}\,dx$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-au^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}\,du = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{0}^{+\infty} e^{-au^2}\,du$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}} \quad (4.27) \quad \text{(តាមរូបមន្ត (4.21))។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2x^2+3x+4)}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-16x^2} e^{-6x}\,dx$ និង

$\int_{-5/6}^{+\infty} e^{-(3x^2+5x+7)}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (4.25) , (4.26) និង (4.27) យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2x^2+3x+4)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{3^2-4\cdot 2\cdot 4}{4\cdot 2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{23}{8}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-16x^2} e^{-6x}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{16}}\, e^{3^2/16} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\, e^{9/16}$$

និង $\int_{-5/6}^{+\infty} e^{-(3x^2+5x+7)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\frac{5^2-4\cdot3\cdot7}{4\cdot3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3\pi}\, e^{-\frac{59}{12}}$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី៤នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int e^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int \frac{dx}{p+qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^2}$, $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$, $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, $\int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx}\,dx$ និង $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនៅក្នុងជំពូកទី៥បន្តទៀត។

ជំពូកទី៥
ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីត
(Types of Integrals Involving Logarithmic Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៥នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៥.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a(px+q)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a(px+q)\,dx$ $(a>0\,,\ a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(px+q)$ $(a>0\,,\ a\neq 1)$ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់បានកាលណា $px+q>0$ ។

យើងចាប់ផ្ដើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a(px+q)\,dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $p=0$ និង $p\neq 0$ ។

- ករណី $p=0$ នាំឱ្យ $\int \log_a(px+q)\,dx = \int \log_a q\,dx = x\log_a q + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q>0$ ។

- ករណី $p\neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u=\log_a(px+q)=\dfrac{\ln(px+q)}{\ln a}$ នាំឱ្យ $du=\dfrac{p\,dx}{(px+q)\ln a}$

និង $dv=dx$ នាំឱ្យ $v=x$ ។

នាំឱ្យ $\int \log_a(px+q)dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x\log_a(px+q) - \frac{1}{\ln a}\int \frac{px}{(px+q)}dx$$

$$= x\log_a(px+q) - \frac{1}{\ln a}\int \frac{(px+q)-q}{(px+q)}dx$$

$$=x\log_a(px+q)-\frac{1}{\ln a}\int\left(1-\frac{q}{px+q}\right)dx$$
$$=x\log_a(px+q)-\frac{1}{\ln a}\left(x-\frac{q}{p}\ln|px+q|\right)+c$$
$$=\frac{(px+q)}{p}\log_a(px+q)-\frac{x}{\ln a}+c \quad (px+q>0)$$
$$=\frac{(px+q)\ln(px+q)-px}{p\ln a}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\log_a(px+q)dx=\frac{(px+q)}{p}\log_a(px+q)-\frac{x}{\ln a}+c=\frac{(px+q)\ln(px+q)-px}{p\ln a}+c} \quad (5.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$, $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int\ln x\,dx=x\ln x-x+c} \quad (5.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int\log_a x\,dx=x\log_a x-\frac{x}{\ln a}+c=\frac{x\ln x-x}{\ln a}+c} \quad (5.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int\ln(px+q)dx=\frac{(px+q)\ln(px+q)-px}{p}+c=\frac{1}{p}(px+q)\ln(px+q)-x+c} \quad (5.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int_1^e \ln x\,dx$, $\int\log_3 x\,dx$, $\int_3^4 \ln(2x-4)dx$ និង $\int\log_5(7x+9)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.2) , (5.3) , (5.4) និង (5.1) យើងបាន៖

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e = \left(e\ln e - e\right) - \left(1\cdot\ln 1 - 1\right) = 0 + 1 = 1$$

$$\int \log_3 x\,dx = x\log_3 x - \frac{x}{\ln 3} + c$$

$$\int_3^4 \ln(2x-4)\,dx = \frac{(2x-4)\ln(2x-4) - 2x}{2}\Bigg|_3^4$$

$$= \frac{6\ln 2 - 2}{2} = 3\ln 2 - 1 \approx 1.0794$$

និង $\int \log_5(7x+9)\,dx = \frac{(7x+9)}{7}\log_5(7x+9) - \frac{x}{\ln 5} + c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $I = \int_1^e x\ln x\,dx$ និង $J = \int_1^e x^2\ln x\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូង យើងគណនា $I = \int_1^e x\ln x\,dx$ ។

យើងយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$

និង $dv = \ln x\, dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int \ln x\, dx = x\ln x - x$ (តាមរូបមន្ត (5.2))។

នាំឱ្យ $I = \int_1^e x\ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x\left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \left(x\ln x - x\right)dx$$

$$= e\left(e\ln e - e\right) - 1\cdot\left(1\cdot\ln 1 - 1\right) - \int_1^e x\ln x\,dx + \int_1^e x\,dx$$

$$= 1 - I + \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e = 1 - I + \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$$

នាំឱ្យ $2I = 1 + \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2+1}{2}$

នាំឱ្យ $I = \frac{e^2+1}{4} \approx 2.0972$ ។

បន្ទាប់មក យើងគណនា $J = \int_1^e x^2\ln x\,dx$ ។

យើងយក $u = x^2$ នាំឱ្យ $du = 2x\,dx$

និង $dv = \ln x\,dx$ នាំឱ្យ $v = \int dv = \int \ln x\,dx = x\ln x - x$ (តាមរូបមន្ត (5.2)) ។

នាំឱ្យ $\mathrm{J} = \int_1^e x^2 \ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x^2(x\ln x - x)\Big|_1^e - \int_1^e 2x(x\ln x - x)\,dx$$

$$= e^2(e\ln e - e) - 1^2\cdot(1\cdot\ln 1 - 1) - 2\int_1^e x^2\ln x\,dx + 2\int_1^e x^2\,dx$$

$$= 1 - 2\mathrm{J} + 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e = 1 - 2\mathrm{J} + \frac{2}{3}(e^3 - 1)$$

នាំឱ្យ $3\mathrm{J} = 1 + \frac{2}{3}(e^3-1) = \frac{2e^3+1}{3}$

នាំឱ្យ $\mathrm{J} = \frac{2e^3+1}{9} \approx 4.5745$ ។

៥.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a|px+q|\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a|px+q|\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a|px+q|$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់បានកាលណា $px+q\neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្ដើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a|px+q|\,dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $p=0$ និង $p\neq 0$ ។

- ករណី $p=0$ នាំឱ្យ $\int \log_a|px+q|\,dx = \int \log_a|q|\,dx = x\log_a|q| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q\neq 0$ ។

- ករណី $p\neq 0$ និងយើងបន្ថែមលក្ខខណ្ឌ $px+q\neq 0$ ។

+ ចំពោះ $px+q>0$ នាំឱ្យ $|px+q| = px+q$ និងតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្ដល់ឱ្យ

$$\int \log_a|px+q|dx = \int \log_a(px+q)dx = \frac{(px+q)}{p}\log_a(px+q) - \frac{x}{\ln a} + c$$

+ ចំពោះ $px+q<0$ នាំឱ្យ $|px+q| = -(px+q) = (-p)x-q$ និងតាមរូបមន្ត (5.1) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \log_a|px+q|dx = \int \log_a((-p)x-q)dx = \frac{((-p)x-q)}{(-p)}\log_a((-p)x-q) - \frac{x}{\ln a} + c$$

$$= \frac{(px+q)}{p}\log_a(-(px+q)) - \frac{x}{\ln a} + c$$

$$= \frac{(px+q)\ln(-(px+q)) - px}{p\ln a} + c \text{ ។}$$

ដូចនេះ បើ $p \neq 0$ និង $px+q \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a|px+q|dx = \frac{(px+q)}{p}\log_a|px+q| - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{(px+q)\ln|px+q| - px}{p\ln a} + c} \quad (5.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$, $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln|x|dx = x\ln|x| - x + c} \quad (5.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a|x|dx = x\log_a|x| - \frac{x}{\ln a} + c = \frac{x\ln|x| - x}{\ln a} + c} \quad (5.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.5) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln|px+q|dx = \frac{(px+q)\ln|px+q| - px}{p} + c = \frac{1}{p}(px+q)\ln|px+q| - x + c} \quad (5.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int_{-1}^{-e} \ln|x|dx$, $\int \log_7|x|dx$, $\int_1^2 \ln|3x-7|dx$ និង

$\int \log_{11}|3x-7|dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.6) , (5.7) , (5.8) និង (5.5) យើងបាន៖

$$\int_{-1}^{-e} \ln|x|dx = (x\ln|x|-x)\Big|_{-1}^{-e}$$

$$= (-e\ln|-e|-(-e))-((-1)\ln|-1|-(-1)) = -1$$

$$\int \log_7|x|dx = x\log_7|x| - \frac{x}{\ln 7} + c$$

$$\int_1^2 \ln|3x-7|dx = (\frac{1}{3}(3x-7)\ln|3x-7|-x)\Big|_1^2$$

$$= -2+\frac{4}{3}\ln 4+1 = \frac{4}{3}\ln 4 - 1 \approx 0.8483$$

និង $\int \log_{11}|3x-7|dx = \frac{(3x-7)}{3}\log_{11}|3x-7| - \frac{x}{\ln 11} + c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int \ln\left|3-\frac{7}{x}\right|dx$ និង $\int \ln|x(x+3)(5-x)|dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.8) និង (5.6) យើងបាន៖

$$\int \ln\left|3-\frac{7}{x}\right|dx = \int\left(\ln|3x-7|-\ln|x|\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}(3x-7)\ln|3x-7|-x\right)-\left(x\ln|x|-x\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}(3x-7)\ln|3x-7| - x\ln|x| + c$$

និង $\int \ln|x(x+3)(5-x)|dx = \int\left(\ln|x|+\ln|x+3|+\ln|x-5|\right)dx$

$$= \left(x\ln|x|-x\right)+\left((x+3)\ln|x+3|-x\right)+\left((x-5)\ln|x-5|-x\right)+c$$

$$= x\ln|x|+(x+3)\ln|x+3|+(x-5)\ln|x-5|-3x+c$$ ។

៥.៣ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a^2(px+q)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a^2(px+q)\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a^2(px+q)=[\log_a(px+q)]^2$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍លោការីត $\log_a(px+q)$ និងវាកំណត់បានកាលណា $px+q>0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a^2(px+q)\,dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $p=0$ និង $p\neq 0$ ។

- ករណី $p=0$ នាំឱ្យ $\int \log_a^2(px+q)\,dx=\int \log_a^2 q\,dx = x\log_a^2 q+c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q>0$ ។

- ករណី $p\neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u=\log_a^2(px+q)=\dfrac{\ln^2(px+q)}{\ln^2 a}$ នាំឱ្យ $du=\dfrac{2p\ln(px+q)\,dx}{(px+q)\ln^2 a}$

និង $dv=dx$ នាំឱ្យ $v=x$ ។

នាំឱ្យ $\int \log_a^2(px+q)dx=\int u\,dv = uv-\int v\,du$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2p}{\ln^2 a}\int\frac{x\ln(px+q)}{(px+q)}dx$$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2}{\ln^2 a}\int\frac{[(px+q)-q]\ln(px+q)}{(px+q)}dx$$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2}{\ln^2 a}\int\ln(px+q)dx-\frac{2(-q)}{\ln^2 a}\int\frac{\ln(px+q)}{px+q}dx$$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2}{\ln^2 a}\left[\frac{1}{p}(px+q)\ln|px+q|-x\right]+\frac{2q}{p\ln^2 a}\int\ln(px+q)d[\ln(px+q)]$$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2}{p\ln^2 a}(px+q)\ln|px+q|+\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{q}{p\ln^2 a}\ln^2(px+q)+c$$

$$=x\log_a^2(px+q)-\frac{2}{p\ln a}(px+q)\log_a(px+q)+\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{q}{p}\log_a^2(px+q)+c$$

$$= \frac{(px+q)}{p}\log_a^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p\ln a}\log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $px+q>0$ ។

ដូចនេះ បើ $p\neq 0$ និង $px+q>0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a^2(px+q)\,dx = \frac{(px+q)}{p}\log_a^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p\ln a}\log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c} \quad (5.9)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $px+q>0$ ។

- ចំពោះ $a=e$, $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c} \quad (5.10)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a^2 x\,dx = x\log_a^2 x - \frac{2x}{\ln a}\log_a x + \frac{2x}{\ln^2 a} + c} \quad (5.11)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2(px+q)\,dx = \frac{(px+q)}{p}\ln^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p}\ln(px+q) + 2x + c} \quad (5.12)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int_1^e \ln^2 x\,dx$, $\int \log_3^2 x\,dx$, $\int_3^4 \ln^2(2x-4)\,dx$ និង

$\int \log_5^2(7x+9)\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.10) , (5.11) , (5.12) និង (5.9) យើងបាន៖

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e\right) - \left(1\cdot\ln^2 1 - 2\cdot 1\cdot \ln 1 + 2\cdot 1\right)$$

$$= e - 2 \approx 0.7182$$

$$\int \log_3^2 x\,dx = x\log_3^2 x - \frac{2x}{\ln 3}\log_3 x + \frac{2x}{\ln^2 3} + c$$

$$\int_3^4 \ln^2(2x-4)\,dx = \left[\frac{(2x-4)}{2}\ln^2(2x-4) - \frac{2(2x-4)}{2}\ln(2x-4) + 2x\right]\Bigg|_3^4$$

$$= 7\ln^2 2 - 6\ln 2 + 2 \approx 1.2042$$

និង $\int \log_5^2(7x+9)\,dx = \frac{1}{7}(7x+9)\log_5^2(7x+9)$

$$-\frac{2(7x+9)}{7\ln 5}\log_5(7x+9) + \frac{2x}{\ln^2 5} + c$$ ។

៥.៤ អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a^2|px+q|dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a^2|px+q|dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a^2|px+q| = \left[\log_a|px+q|\right]^2$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍លោការីត $\log_a|px+q|$ និងវាកំណត់បានកាលណា $px+q\neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a^2|px+q|dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $p=0$ និង $p\neq 0$ ។

- ករណី $p=0$ នាំឱ្យ $\int \log_a^2|px+q|dx = \int \log_a^2|q|dx = x\log_a^2|q| + c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $q\neq 0$ ។

- ករណី $p\neq 0$ និងយើងបន្ថែមលក្ខខណ្ឌ $px+q\neq 0$ ។

+ ចំពោះ $px+q>0$ នាំឱ្យ $|px+q| = px+q$ និងតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្តល់ឱ្យ

$$\int \log_a^2|px+q|dx = \int \log_a^2(px+q)\,dx$$

$$= \frac{(px+q)}{p}\log_a^2(px+q) - \frac{2(px+q)}{p\ln a}\log_a(px+q) + \frac{2x}{\ln^2 a} + c$$ ។

+ ចំពោះ $px+q<0$ នាំឱ្យ $|px+q|=-(px+q)=(-p)x-q$ និងតាមរូបមន្ត (5.9) ផ្ដល់ឱ្យ

$$\int \log_a^2|px+q|dx=\int \log_a^2((-p)x-q)dx$$

$$=\frac{((-p)x-q)}{(-p)}\log_a^2((-p)x-q)-\frac{2((-p)x-q)}{(-p)\ln a}\log_a((-p)x-q)+\frac{2x}{\ln^2 a}+c$$

$$=\frac{(px+q)}{p}\log_a^2(-(px+q))-\frac{2(px+q)}{p\ln a}\log_a(-(px+q))+\frac{2x}{\ln^2 a}+c \text{ ។}$$

ដូចនេះ បើ $p\neq 0$ និង $px+q\neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a^2|px+q|dx=\frac{(px+q)}{p}\log_a^2|px+q|-\frac{2(px+q)}{p\ln a}\log_a|px+q|+\frac{2x}{\ln^2 a}+c} \quad (5.13)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$, $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្ដល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2|x|dx=x\ln^2|x|-2x\ln|x|+2x+c} \quad (5.14)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $p=1$ និង $q=0$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្ដល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \log_a^2|x|dx=x\log_a^2|x|-\frac{2x}{\ln a}\log_a|x|+\frac{2x}{\ln^2 a}+c} \quad (5.15)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a=e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.13) ផ្ដល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln^2|px+q|dx=\frac{(px+q)}{p}\ln^2|px+q|-\frac{2(px+q)}{p}\ln|px+q|+2x+c} \quad (5.16)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int_{-e}^{-1}\ln^2|x|dx$, $\int\log_5^2|x|dx$, $\int_3^4\ln^2|2-3x|dx$ និង $\int\log_7^2|4x-5|dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.14) , (5.15) , (5.16) និង (5.13) យើងបាន៖

$$\int_{-e}^{-1}\ln^2|x|dx=\left(x\ln^2|x|-2x\ln|x|+2x\right)\Big|_{-e}^{-1}$$

$$=\Big((-1)\ln^2|-1|-2(-1)\ln|-1|+2(-1)\Big)-\Big((-e)\ln^2|-e|-2(-e)\ln|-e|+2(-e)\Big)$$

$$=e-2\approx 0.7182$$

$$\int\log_5^2|x|dx=x\log_5^2|x|-\frac{2x}{\ln 5}\log_5|x|+\frac{2x}{\ln^2 5}+c$$

$$\int_3^4\ln^2|2-3x|dx=\int_3^4\ln^2|3x-2|dx$$

$$=\left[\frac{(3x-2)}{3}\ln^2|3x-2|-\frac{2(3x-2)}{3}\ln|3x-2|+2x\right]\Bigg|_3^4$$

$$=\frac{10}{3}\ln^2 10-\frac{7}{3}\ln^2 7-\frac{20}{3}\ln 10+\frac{14}{3}\ln 7+2\approx 4.5680$$

និង $\int\log_7^2|4x-5|dx=\frac{(4x-5)}{4}\log_7^2|4x-5|-\frac{2(4x-5)}{4\ln 7}\log_7|4x-5|+\frac{2x}{\ln^2 7}+c$ ។

៥.៥ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int\log_a(x^2+b^2)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int\log_a(x^2+b^2)\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(x^2+b^2)$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ កាលណា $b\neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្ដើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int\log_a(x^2+b^2)\,dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $b=0$ និង $b\neq 0$ ។

- ករណី $b=0$ នាំឱ្យ

$$\int \log_a(x^2+b^2)\,dx = \int \log_a(x^2)\,dx = 2\int \log_a(x)\,dx$$

$$= 2(x\log_a x - \frac{x}{\ln a}) + c = 2x\log_a x - \frac{2x}{\ln a} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $b \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \log_a(x^2+b^2) = \dfrac{\ln(x^2+b^2)}{\ln a}$ នាំឱ្យ $du = \dfrac{2x\,dx}{(x^2+b^2)\ln a}$

និង $dv = dx$ នាំឱ្យ $v = x$ ។

នាំឱ្យ $\int \log_a(x^2+b^2)dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$$= x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \frac{x^2}{(x^2+b^2)}dx$$

$$= x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \frac{(x^2+b^2)-b^2}{(x^2+b^2)}dx$$

$$= x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \left(1 - \frac{b^2}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$= x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2}{\ln a}\left[x - b^2 \cdot \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right] + c$$

$$= x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{2b}{\ln a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ បើ $b \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a(x^2+b^2)dx = x\log_a(x^2+b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{2b}{\ln a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c} \quad (5.17)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.17) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln(x^2+b^2)dx = x\ln(x^2+b^2) - 2x + 2b\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c} \quad (5.18)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int_1^3 \ln(x^2+5)\,dx$, $\int \log_3(x^2+16)\,dx$ និង $\int_0^2 \log_5(6x^2+25)\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.18) និង (5.17) យើងបាន៖

$$\int_1^3 \ln(x^2+5)\,dx = \left(x\ln(x^2+5)-2x+2\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right)\Bigg|_1^3$$

$$=\left(3\ln 14-6+2\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)-\left(\ln 6-2+2\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$\int \log_3(x^2+16)\,dx = x\log_3(x^2+16)-\frac{2x}{\ln 3}+\frac{8}{\ln 3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

និង $\int_0^2 \log_5(6x^2+25)\,dx = \int_0^2 \log_5[6(x^2+25/6)]dx$

$$=\int_0^2 \left[\log_5 6+\log_5(x^2+25/6)\right]dx$$

$$=\left(x\log_5 6+x\log_5(x^2+25/6)-\frac{2x}{\ln 5}+\frac{10}{\sqrt{6}\ln 5}\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{6}}{5}\right)\right)\Bigg|_0^2$$

$$=2\log_5 6+2\log_5(49/6)-\frac{4}{\ln 5}+\frac{10}{\sqrt{6}\ln 5}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\approx 4.3172$$ ។

៥.៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតរាង $\int \log_a(x^2-b^2)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2-b^2)\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\log_a(x^2-b^2)$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍លោការីតដែលកំណត់លើ $x^2-b^2>0 \Leftrightarrow x<-|b| \vee x>|b|$ កាលណា $b\neq 0$ ។

យើងចាប់ផ្តើមគណនាអាំងតេក្រាល $\int \log_a(x^2-b^2)\,dx$ ដោយសិក្សាពីរករណីគឺ $b=0$ និង $b\neq 0$ ។

- ករណី $b=0$ នាំឱ្យ

$$\int \log_a(x^2-b^2)\,dx = \int \log_a(x^2)\,dx = 2\int \log_a(x)\,dx$$

$$= 2(x\log_a x - \frac{x}{\ln a}) + c = 2x\log_a x - \frac{2x}{\ln a} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $b \neq 0$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \log_a(x^2-b^2) = \dfrac{\ln(x^2-b^2)}{\ln a}$ នាំឱ្យ $du = \dfrac{2x\,dx}{(x^2-b^2)\ln a}$

និង $dv = dx$ នាំឱ្យ $v = x$ ។

នាំឱ្យ $\int \log_a(x^2-b^2)dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \frac{x^2}{(x^2-b^2)}dx$$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \frac{(x^2-b^2)+b^2}{(x^2-b^2)}dx$$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2}{\ln a}\int \left(1 + \frac{b^2}{x^2-b^2}\right)dx$$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2}{\ln a}\left[x + b^2\cdot\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right|\right] + c$$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2x}{\ln a} + \frac{b}{\ln a}\ln\left|\frac{x+b}{x-b}\right| + c$$

$$= x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2x}{\ln a} + b\log_a\left|\frac{x+b}{x-b}\right| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ បើ $b \neq 0$ នាំឱ្យយើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \log_a(x^2-b^2)dx = x\log_a(x^2-b^2) - \frac{2x}{\ln a} + b\log_a\left|\frac{x+b}{x-b}\right| + c} \quad (5.19)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ចំពោះ $a = e$ នោះតាមរូបមន្ត (5.19) ផ្តល់ឱ្យ

$$\boxed{\int \ln(x^2-b^2)\,dx = x\ln(x^2-b^2) - 2x + b\ln\left|\frac{x+b}{x-b}\right| + c} \quad (5.20)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_3^5 \ln(x^2-4)\,dx$, $\int \log_3(x^2-9)\,dx$ និង $\int_{-4}^{-2} \log_5(9x^2-16)\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (5.20) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\int_3^5 \ln(x^2-4)\,dx = \left(x\ln(x^2-4) - 2x + 2\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \right)\Bigg|_3^5$$

$$= \left(5\ln 21 - 10 + 2\ln\left|\frac{7}{3}\right| \right) - \left(3\ln 5 - 6 + 2\ln\left|\frac{5}{1}\right| \right)$$

$$= 5\ln 21 - 3\ln 5 - 4 + 2\ln\frac{7}{15} \approx 4.8700$$

$$\int \log_3(x^2-9)\,dx = x\log_3(x^2-9) - \frac{2x}{\ln 3} + 3\log_3\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$$

និង $$\int_{-4}^{-2} \log_5(9x^2-16)\,dx = \int_{-4}^{-2} \log_5[9(x^2-16/9)]\,dx$$

$$= \int_{-4}^{-2} \left[\log_5 9 + \log_5(x^2-16/9) \right] dx$$

$$= \left(x\log_5 9 + x\log_5(x^2-16/9) - \frac{2x}{\ln 5} + \frac{4}{3}\log_5\left|\frac{x+4/3}{x-4/3}\right| \right)\Bigg|_{-4}^{-2}$$

$$-\left(-4\log_5 9 - 4\log_5\frac{128}{9} + \frac{8}{\ln 5} + \frac{4}{3}\log_5\frac{1}{2} \right)$$

$$= 2\log_5 9 - 2\log_5\frac{20}{9} + 4\log_5\frac{128}{9} - \frac{4}{\ln 5} + \frac{4}{3}\log_5\frac{2}{5} \approx 5.0917 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \log_2(x^3-1)\,dx$ និង $\int \log_4(x^4-1)\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)\left[(x+1/2)^2 + 3/4\right]$

និង $x^4-1 = \left(x^2\right)^2 - 1^2 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$ ។

តាមរូបមន្ត (5.1) , (5.17) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\int \log_2(x^3-1)\,dx = \int \log_2[(x-1)(x^2+x+1)]\,dx$$

$$= \int \log_2(x-1)\,dx + \int \log_2(x^2+x+1)\,dx$$

$$= \int \log_2(x-1)\,dx + \int \log_2\left((x+1/2)^2+3/4\right)d(x+1/2)$$

$$= (x-1)\log_2(x-1) - \frac{x}{\ln 2} + (x+1/2)\log_2\left((x+1/2)^2+3/4\right)$$
$$-\frac{2(x+1/2)}{\ln 2} + \frac{2(\sqrt{3}/2)}{\ln 2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + c$$
$$= (x-1)\log_2(x-1) - \frac{3x}{\ln 2} + \frac{1}{2}(2x+1)\log_2\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_1$$

និង $\int \log_4(x^4-1)\,dx = \int \log_4\left[(x^2-1)(x^2+1)\right]dx$

$$= \int \log_4(x^2-1)\,dx + \int \log_4(x^2+1)\,dx$$

$$= x\log_4(x^2-1) - \frac{2x}{\ln 4} + \log_4\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$
$$+ x\log_4(x^2+1) - \frac{2x}{\ln 4} + \frac{2}{\ln 4}\tan^{-1}x + c$$
$$= x\log_4(x^4-1) - \frac{4x}{\ln 4} + \log_4\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{2}{\ln 4}\tan^{-1}x + c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \log_7(x^8-1)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^8-1 = \left(x^4\right)^2 - 1^2 = \left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)$

$$= \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left[(x^4+2x^2+1) - 2x^2\right]$$
$$= \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left[(x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2\right]$$
$$= \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right)$$
$$= \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left((x-\sqrt{2}/2)^2+1/2\right)\left((x+\sqrt{2}/2)^2+1/2\right) \text{ ។}$$

តាមរូបមន្ត (5.17) និង (5.19) យើងបាន៖

$$\int \log_7(x^8-1)\,dx = \int \log_7\left[\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left((x-\sqrt{2}/2)^2+1/2\right)\left((x+\sqrt{2}/2)^2+1/2\right)\right]dx$$

$$= \int \log_7\left(x^2-1\right)dx + \int \log_7\left(x^2+1\right)dx$$

$$+\int \log_7\left((x-\sqrt{2}/2)^2+1/2\right)dx + \int \log_7\left((x+\sqrt{2}/2)^2+1/2\right)dx$$

$$= x\log_7(x^2-1) - \frac{2x}{\ln 7} + \log_7\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + x\log_7(x^2+1) - \frac{2x}{\ln 7} + \frac{2}{\ln 7}\tan^{-1}x$$

$$+(x-\sqrt{2}/2)\log_7\left((x-\sqrt{2}/2)^2+1/2\right) - \frac{2(x-\sqrt{2}/2)}{\ln 7} + \frac{2(\sqrt{2}/2)}{\ln 7}\tan^{-1}\left(\frac{(x-\sqrt{2}/2)}{\sqrt{2}/2}\right)$$

$$+(x+\sqrt{2}/2)\log_7\left((x+\sqrt{2}/2)^2+1/2\right) - \frac{2(x+\sqrt{2}/2)}{\ln 7} + \frac{2(\sqrt{2}/2)}{\ln 7}\tan^{-1}\left(\frac{(x+\sqrt{2}/2)}{\sqrt{2}/2}\right) + c$$

$$= x\log_7(x^4-1) - \frac{4x}{\ln 7} + \log_7\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{2}{\ln 7}\tan^{-1}x$$

$$+\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2})\log_7\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) - \frac{4x}{\ln 7} + \frac{\sqrt{2}}{\ln 7}\tan^{-1}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(2x+\sqrt{2})\log_7\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{\ln 7}\tan^{-1}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី៥នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីតនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតមួយចំនួនដូចជា $\int \log_a(px+q)\,dx$, $\int \log_a|px+q|\,dx$, $\int \log_a^2(px+q)\,dx$, $\int \log_a^2|px+q|\,dx$, $\int \log_a(x^2+b^2)\,dx$ និង $\int \log_a(x^2-b^2)\,dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ និងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៅក្នុងជំពូកទី៦បន្តទៀត។

ជំពូកទី៦
ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន
អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ
(Types of Integrals Involving Exponential and Power Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៦នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៦.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x e^{\alpha x} dx$ និង $\int x a^{\alpha x} dx$

អាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x} dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x e^{\alpha x} dx$ តាមការសិក្សាពីរករណីគឺ $\alpha = 0$ និង $\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x e^{\alpha x} dx = \int x e^{0 \cdot x} dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = x$ នាំឱ្យ $du = dx$ និង $dv = e^{\alpha x} dx$ នាំឱ្យ $v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ ។

នាំឱ្យ $\int x e^{\alpha x} dx = \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx$

$$=\frac{x}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\left(\alpha x-1\right)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x e^{\alpha x}\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\left(\alpha x-1\right)+c} \quad (6.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x a^{\alpha x}\,dx$ ។

តាមរូបមន្ត (6.1) យើងទាញបាន៖

$$\int x a^{\alpha x}\,dx=\int x\left(e^{\ln a}\right)^{\alpha x}dx=\int x e^{(\alpha\ln a)x}\,dx$$

$$=\frac{e^{(\alpha\ln a)x}}{(\alpha\ln a)^2}\left((\alpha\ln a)x-1\right)+c$$

$$=\frac{a^{\alpha x}}{\alpha^2\ln^2 a}\left(\alpha x\ln a-1\right)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x a^{\alpha x}\,dx=\frac{a^{\alpha x}}{\alpha^2\ln^2 a}\left(\alpha x\ln a-1\right)+c} \quad (6.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int x e^{3x}\,dx$, $\int (2x+5)e^{2x-7}\,dx$ និង $\int x 5^{3x+4}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.1) និង (6.2) យើងបាន៖

$$\int x e^{3x}\,dx=\frac{e^{3x}}{3^2}\left(3x-1\right)+c=\frac{e^{3x}}{9}\left(3x-1\right)+c$$

$$\int (2x+5)e^{2x-7}\,dx=e^{-7}\int (2x+5)e^{2x}\,dx$$

$$= 2e^{-7}\int xe^{2x}\,dx + 5e^{-7}\int e^{2x}\,dx$$

$$= 2e^{-7}\cdot\frac{e^{2x}}{2^2}(2x-1) + 5e^{-7}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$= \frac{e^{2x-7}}{2}(2x-1) + \frac{5e^{2x-7}}{2} + c$$

$$= \frac{e^{2x-7}}{2}(2x+4) + c$$

និង $\int x5^{3x+4}\,dx = 5^4\int x5^{3x}\,dx = 5^4\cdot\frac{5^{3x}}{3^2\ln^2 5}(3x\ln 5 - 1) + c$

$$= \frac{5^{3x+4}}{9\ln^2 5}(3x\ln 5 - 1) + c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_0^1 xe^{2x+3}\,dx$ និង $\int_0^{+\infty} x3^{-4x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.1) និង (6.2) យើងបាន៖

$$\int_0^1 xe^{2x+3}\,dx = \frac{e^{2x}}{2^2}(2x-1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{e^{2\cdot 1}}{2^2}(2\cdot 1 - 1) - \frac{e^{2\cdot 0}}{2^2}(2\cdot 0 - 1) = \frac{e^2+1}{4}$$

និង $\int_0^{+\infty} x3^{-4x}\,dx = \frac{3^{-4x}}{(-4)^2\ln^2 3}\left((-4)x\ln 3 - 1\right)\Big|_0^{+\infty}$

$$= 0 - \frac{(-4\cdot 0\cdot \ln 3 - 1)}{16\ln^2 3\times 3^0} = \frac{1}{16\ln^2 3} \text{ ។}$$

៦.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$ និង $\int x^2 a^{\alpha x}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^2 e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$ តាមការសិក្សាពីរករណីគឺ $\alpha=0$ និង $\alpha\neq 0$ ។

- ករណី $\alpha=0$ នាំឱ្យ

$$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx=\int x^2 e^{0\cdot x}\,dx=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha\neq 0$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u=x^2$ នាំឱ្យ $du=2x\,dx$ និង $dv=e^{\alpha x}dx$ នាំឱ្យ $v=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$ ។

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned}\int x^2 e^{\alpha x}\,dx&=\frac{x^2}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{2}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\,dx\\&=\frac{x^2}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}(\alpha x-1)+c\\&=\frac{\alpha^2x^2}{\alpha^3}e^{\alpha x}-\frac{2e^{\alpha x}}{\alpha^3}(\alpha x-1)+c\\&=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^3}\left(\alpha^2x^2-2\alpha x+2\right)+c\end{aligned}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^2 e^{\alpha x}\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^3}\left(\alpha^2x^2-2\alpha x+2\right)+c}\quad(6.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^2 a^{\alpha x}\,dx$ ។

តាមរូបមន្ត (6.3) យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned}\int x^2 a^{\alpha x}\,dx&=\int x^2\left(e^{\ln a}\right)^{\alpha x}dx=\int x^2 e^{(\alpha\ln a)x}\,dx\\&=\frac{e^{(\alpha\ln a)x}}{(\alpha\ln a)^3}\left((\alpha\ln a)^2x^2-2(\alpha\ln a)x+2\right)+c\end{aligned}$$

$$=\frac{a^{\alpha x}}{\alpha^3\ln^3 a}\left(\alpha^2\ln^2 a\,x^2-2\alpha x\ln a+2\right)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\,a\neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^2 a^{\alpha x}\,dx=\frac{a^{\alpha x}}{\alpha^3\ln^3 a}\left(\alpha^2\ln^2 a\,x^2-2\alpha x\ln a+2\right)+c}\quad(6.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\,a\neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int x^2 e^{2x}\,dx$, $\int (3x^2-5)e^{4x-3}\,dx$ និង $\int x^2 3^{4x+7}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.3) និង (6.4) យើងបាន៖

$$\int x^2 e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2^3}\left(2^2x^2-2\cdot 2x+2\right)+c$$

$$=\frac{e^{2x}}{8}\left(4x^2-4x+2\right)+c$$

$$\int (3x^2-5)e^{4x-3}\,dx=3\int x^2e^{4x-3}\,dx-5\int e^{4x-3}\,dx$$

$$=3e^{-3}\int x^2e^{4x}\,dx-5e^{-3}\int e^{4x}\,dx$$

$$=3e^{-3}\cdot\frac{e^{4x}}{4^3}\left(4^2x^2-2\cdot 4x+2\right)-5e^{-3}\cdot\frac{1}{4}e^{4x}+c$$

$$=\frac{e^{4x-3}}{64}\left(48x^2-24x-74\right)+c$$

និង $$\int x^2 3^{4x+7}\,dx=3^7\int x^2 3^{4x}\,dx$$

$$=3^7\cdot\frac{3^{4x}}{4^3\ln^3 3}\left(4^2\ln^2 3\,x^2-2\cdot 4x\ln 3+2\right)+c$$

$$=\frac{3^{4x+7}}{64\ln^3 3}\left(16\ln^2 3\cdot x^2-8x\ln 3+2\right)+c$$ ។

៦.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$ $(n\in\{0,1,2,...\})$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^n e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$ តាមការសិក្សាពីរករណីគឺ $\alpha=0$ និង $\alpha\neq 0$ ។

- ករណី $\alpha=0$ នាំឱ្យ

$$\int x^n e^{\alpha x}\,dx=\int x^n e^{0\cdot x}\,dx=\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha\neq 0$ យើងតាង $\mathrm{I}_n=\int x^n e^{\alpha x}\,dx$ ។

- បើ $n=0$ នាំឱ្យ $\mathrm{I}_0=\int x^0 e^{\alpha x}\,dx=\int e^{\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n\geq 1$ នោះយើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដើម្បីរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ដោយ យក $u=x^n$ នាំឱ្យ $du=nx^{n-1}dx$ និង $dv=e^{\alpha x}dx$ នាំឱ្យ $v=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$ ។

នាំឱ្យ $\mathrm{I}_n=\int x^n e^{\alpha x}\,dx=\frac{x^n}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}e^{\alpha x}\,dx$

$$=\frac{x^n}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n}{\alpha}\mathrm{I}_{n-1}=\frac{x^n}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n}{\alpha}\left(\frac{x^{n-1}}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n-1}{\alpha}\mathrm{I}_{n-2}\right)$$

$$=\frac{x^n}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n\,x^{n-1}}{\alpha^2}e^{\alpha x}+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}\left(\frac{x^{n-2}}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n-2}{\alpha}\mathrm{I}_{n-3}\right)$$

$$=.....$$

$$=\frac{x^n}{\alpha}e^{\alpha x}-\frac{n x^{n-1}}{\alpha^2}e^{\alpha x}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\alpha^3}e^{\alpha x}-\ldots+\frac{(-1)^{n-3}n(n-1)\ldots3\cdot x^3}{\alpha^{n-2}}e^{\alpha x}+$$

$$+\frac{(-1)^{n-2}n!\cdot x^2}{\alpha^{n-1}}e^{\alpha x}+\frac{(-1)^{n-1}n!\cdot x}{\alpha^n}e^{\alpha x}+\frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha x}+c$$

$$=e^{\alpha x}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!\, x^{n-i}}{(n-i)!\,\alpha^{i+1}}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^n e^{\alpha x}\,dx=e^{\alpha x}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!\, x^{n-i}}{(n-i)!\,\alpha^{i+1}}+c} \quad (6.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ , $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ និង $\alpha\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int x^3 e^{2x}\,dx$ និង $\int x^5 3^{4x+3}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.5) យើងបាន៖

$$\int x^3 e^{2x}\,dx=e^{2x}\sum_{i=0}^{3}\frac{(-1)^i 3!\, x^{3-i}}{(3-i)!\,2^{i+1}}+c$$

និង $$\int x^5 3^{4x+3}\,dx=3^3\int x^5 3^{4x}\,dx=3^3\int x^5\left(e^{\ln 3}\right)^{4x}dx$$

$$=3^3\int x^5 e^{(4\ln 3)x}\,dx$$

$$=3^3 e^{(4\ln 3)x}\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i 5!\, x^{5-i}}{(5-i)!\,(4\ln 3)^{i+1}}+c$$

$$=3^{4x+3}\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i 5!\, x^{5-i}}{(5-i)!\,(4\ln 3)^{i+1}}+c \text{ ។}$$

៦.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^{-1}e^{\alpha x}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេ

ក្រាល $x^{-1}e^{\alpha x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx$ តាមការសិក្សាពីរករណីគឺ $\alpha = 0$ និង $\alpha \neq 0$ ។

- ករណី $\alpha = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx = \int x^{-1}e^{0\cdot x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha \neq 0$ យើងគណនា $\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx$ ។

យើងមានស៊េរីស្វ័យគុណនៃចំនួនពិតគឺ

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} + \ldots = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$$ ចំពោះ $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ $\frac{\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{x}} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}\mathrm{x} + \frac{\alpha^3}{3!}\mathrm{x}^2 + \ldots + \frac{\alpha^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}\mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} + \ldots$ ។

នាំឱ្យ $\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!}x + \frac{\alpha^3}{3!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}x^{n-1} + \ldots \right) dx$$

$$= \ln|x| + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3!}\cdot\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$= \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n\cdot n!}$$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^{-1}e^{\alpha x}\,dx = \int \frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n\cdot n!}} \quad (6.6)$$

ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int x^{-1}e^{2x}\,dx$ និង $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.6) យើងបាន៖

$$\int x^{-1}e^{2x}\,dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot n!}$$

និង $$\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x}\,dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3x)^n}{n\cdot n!}\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\ln|2| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^n}{n\cdot n!}\right) - \left(\ln|1| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n\cdot n!}\right)$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^n - 3^n}{n\cdot n!} \approx 76.0559$$ (ប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ)។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{(3x^2+2x+1)e^{4x}}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលក្ខណៈអាំងតេក្រាល រូបមន្ត(6.1) និង (6.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{(3x^2+2x+1)e^{4x}}{x}dx = \int\left(3x+2+\frac{1}{x}\right)e^{4x}\,dx$$

$$= 3\int xe^{4x}\,dx + 2\int e^{4x}\,dx + \int\frac{e^{4x}}{x}dx$$

$$= 3\cdot\frac{e^{4x}}{4^2}(4x-1) + 2\cdot\frac{1}{4}e^{4x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4x)^n}{n\cdot n!}$$

$$= \frac{3e^{4x}}{16}(4x-1) + \frac{1}{2}e^{4x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(4x)^n}{n\cdot n!}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{(3t-2)^3e^{5t}}{t}dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលក្ខណៈអាំងតេក្រាល រូបមន្ត (6.3), (6.1) និង (6.6) យើងបាន៖

$$\int\frac{(3t-2)^3e^{5t}}{t}dt = \int\frac{\left[(3t)^3+3(3t)^2(-2)+3(3t)(-2)^2+(-2)^3\right]e^{5t}}{t}dt$$

$$=\int\frac{\left(27t^3-54t^2+36t-8\right)e^{5t}}{t}dt$$

$$=\int\left(27t^2-54t+36-\frac{8}{t}\right)e^{5t}\,dt$$

$$=27\int t^2e^{5t}\,dt-54\int t\,e^{5t}\,dt+36\int e^{5t}\,dt-8\int\frac{e^{5t}}{t}\,dt$$

$$=27\cdot\frac{e^{5t}}{5^3}\left(5^2x^2-2\cdot5x+2\right)-54\cdot\frac{e^{5t}}{5^2}(5x-1)+36\cdot\frac{e^{5t}}{5}-8\left[\ln|x|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5x)^n}{n\cdot n!}\right]$$

$$=\frac{e^{5t}}{125}\left(675x^2-270x+54\right)-\frac{e^{5t}}{125}(1350x-270)+900\cdot\frac{e^{5t}}{125}-8\ln|x|-8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5x)^n}{n\cdot n!}$$

$$=\frac{e^{5t}}{125}\left(675x^2-1620x+1224\right)-8\ln|x|-8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5x)^n}{n\cdot n!}$$ ។

៦.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int xe^{\alpha x^2}dx$ និង $\int xa^{\alpha x^2}dx$

អាំងតេក្រាល $\int xe^{\alpha x^2}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $xe^{\alpha x^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int xe^{\alpha x^2}dx$ តាមការសិក្សាពីរករណីគឺ $\alpha=0$ និង $\alpha\neq0$ ។

- ករណី $\alpha=0$ នាំឱ្យ

$$\int xe^{\alpha x^2}dx=\int xe^{0\cdot x^2}dx=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $\alpha\neq0$ នោះយើងប្រើវិធីប្តូរអថេរ ដោយតាង $u=\alpha x^2$ នាំឱ្យ $du=2\alpha x\,dx$ សមមូល $x\,dx=\dfrac{du}{2\alpha}$ ។

នាំឱ្យ $\int xe^{\alpha x^2}dx=\int e^u\,\frac{du}{2\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\int e^u du$

$$=\frac{1}{2\alpha}e^{u}+c=\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x e^{\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}+c}\quad(6.7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x a^{\alpha x^2}\,dx$, $a>0$, $a\neq 1$ ។

តាមរូបមន្ត (6.7) យើងទាញបាន៖

$$\int x a^{\alpha x^2}\,dx=\int x\left(e^{\ln a}\right)^{\alpha x^2}dx=\int x e^{(\alpha\ln a)x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2(\alpha\ln a)}e^{(\alpha\ln a)x^2}+c=\frac{1}{2\alpha\ln a}a^{\alpha x^2}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x a^{\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2\alpha\ln a}a^{\alpha x^2}+c}\quad(6.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$ ។

ចំពោះ $\alpha<0$ និងតាមរូបមន្ត (6.7) យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2\alpha e^{-\alpha x^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0-0=0$$

និង $$\int_{0}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2\alpha e^{-\alpha x^2}}\Bigg|_{0}^{+\infty}=0-\frac{1}{2\alpha}=-\frac{1}{2\alpha}$$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx=0}\quad(6.9)\ \text{និង}\ \boxed{\int_{0}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx=-\frac{1}{2\alpha}}\quad(6.10)$$

ដែល $\alpha<0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int x e^{2x^2}\,dx$, $\int x e^{-3x^2}\,dx$ និង $\int_0^1 x 5^{3x^2+4}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.7) និង (6.8) យើងបាន៖

$$\int x e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{2\cdot 2}e^{2x^2} + c = \frac{1}{4}e^{2x^2} + c$$

$$\int x e^{-3x^2}\,dx = \frac{1}{2(-3)}e^{-3x^2} + c = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + c$$

និង $$\int_0^1 x 5^{3x^2+4}\,dx = 5^4\int_0^1 x 5^{3x^2}\,dx = 5^4\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ln 5}5^{3x^2}\Big|_0^1$$

$$= 5^4\left(\frac{1}{2\cdot 3\ln 5}5^{3\cdot 1^2} - \frac{1}{2\cdot 3\ln 5}5^{3\cdot 0^2}\right)$$

$$= \frac{5^4\left(5^3-1\right)}{6\ln 5} = \frac{77500}{6\ln 5}$$ ។

៦.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^{-2}e^{-\alpha x^2}dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^{-2}e^{-\alpha x^2}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^{-2}e^{-\alpha x^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមានស៊េរីស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ e^x គឺ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ $$e^{-\alpha x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-\alpha x^2\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k}}{k!}$$

និង $$x^{-2}e^{-\alpha x^2} = \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k}}{x^2\,k!}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k}}{x^2\,k!}$$

$$=\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k-2}}{k!}$$ ។

នាំឱ្យ $$\int x^{-2}e^{-\alpha x^2}dx=\int\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k-2}}{k!}\right)dx$$

$$=\int x^{-2}dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k}{k!}\int x^{2k-2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k-1}}{k!(2k-1)}$$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^{-2}e^{-\alpha x^2}dx=\int\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^k x^{2k-1}}{k!(2k-1)}}\quad(6.11)$$

ចំពោះគ្រប់ $\alpha\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int x^{-2}e^{-3x^2}dx$ និង $\int_1^2\frac{e^{-2x^2}}{x^2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.11) យើងបាន៖

$$\int x^{-2}e^{-3x^2}dx=-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 3^k x^{2k-1}}{k!(2k-1)}$$

និង $$\int_1^2\frac{e^{-2x^2}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^k x^{2k-1}}{k!(2k-1)}\Bigg|_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^k\cdot 2^{2k-1}}{k!(2k-1)}\right)-\left(-\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k 2^k\cdot 1^{2k-1}}{k!(2k-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\left(2^{3k-1}-2^k\right)}{k!(2k-1)}$$ ។

៦.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-a(x-b)^2}dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-a(x-b)^2}dx$ $(a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $xe^{-a(x-b)^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

ជាដំបូង យើងគណនា $I(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx \ (a>0)$ ។

នាំឱ្យ $(I(a))^2=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-ay^2}dy$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy \quad (*)$$ ។

តាង $y=xt$, $t>0$ នាំឱ្យ $dy=xdt$, $t>0$ និងតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$(I(a))^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+x^2t^2)}x\,dxdt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-a(1+t^2)x^2}x\,dxdt \quad (*_1)$$ ។

តាង $u=-a(1+t^2)\,x^2$ នាំឱ្យ $du=-2a(1+t^2)\,x\,dx\Rightarrow x\,dx=-\dfrac{du}{2a(1+t^2)}$ និង

តាមសមីការ $(*_1)$ នាំឱ្យ

$$(I(a))^2=-\int_0^{+\infty}\int_0^{-\infty} e^u\frac{du}{2a(1+t^2)}dt=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\int_0^{-\infty}\frac{e^u}{1+t^2}du\,dt$$

$$=-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{e^u}{1+t^2}\bigg|_0^{-\infty}dt=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2a}\tan^{-1}(t)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4a}$$

នាំឱ្យ $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=I(a)=\sqrt{\dfrac{\pi}{4a}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=2\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.12) \text{ និង } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.13)$$

ដែល $a>0$ ។

បន្ទាប់មក យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2}dx$ នេះបានដោយតាង

$t = x - b$ នាំឱ្យ $dt = dx$ និង $x = t + b$ ។

នាំឱ្យ $$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(t+b)e^{-at^2}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-at^2}dt + b\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt$$

$$= 0 + b\sqrt{\frac{\pi}{a}} = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ (តាមរូបមន្ត (6.9) និង (6.13))។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2}dx = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \quad (6.14)$$

ដែល $a > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-3(x-2)^2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.12) , (6.13) និង (6.14) យើងបាន៖

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

និង $$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-3(x-2)^2}dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$ ។

៦.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}dx$ $(a > 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល xe^{-ax^2+bx} ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមាន $-ax^2+bx=-a\left(x^2-2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$=-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}$$ ។

នាំឱ្យ $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}dx$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\cdot\frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{\sqrt{\pi}\,b}{2a^{3/2}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$ (តាមរូបមន្ត (6.14))។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}dx=\frac{\sqrt{\pi}\,b}{2a^{3/2}}e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.15)$$

ដែល $a>0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2+2x}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-4x^2+3x+2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.15) យើងបាន៖

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2+2x}dx=\frac{\sqrt{\pi}\cdot 2}{2\cdot 1^{3/2}}e^{\frac{2^2}{4\cdot 1}}=e\sqrt{\pi}$$

និង $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-4x^2+3x+2}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-4x^2+3x}dx$

$$=e^2\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot 3}{2\cdot 4^{3/2}}e^{\frac{3^2}{4\cdot 4}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{16}e^{\frac{41}{16}}$$ ។

៦.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx$ $(a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមាន

អនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^2 e^{-ax^2}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមានរូបមន្ត (6.13) គឺ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ដែល $a>0$ ។

យើងធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (6.13) ធៀបនឹងអថេរ a ផ្តល់ឱ្យ

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{d}{da}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{d}{da}\left(\sqrt{\pi}\, a^{-1/2}\right)$$

សមមូល $$-\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ដូចនេះ $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}} \quad (6.16)$$

ដែល $a>0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} (3x-2)^2 e^{-2x^2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.16) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

និងតាមរូបមន្ត (6.16) , (6.9) និង (6.13) នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} (3x-2)^2 e^{-2x^2}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((3x)^2 - 2(3x)(2) + 2^2\right)e^{-2x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(9x^2 - 12x + 4\right)e^{-2x^2}dx \\
&= 9\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2}dx - 12\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2x^2}dx + 4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}dx \\
&= 9\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2^3}} - 12\times 0 + 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{9}{4}+4\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$ ។

៦.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx \ (a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^2 e^{-ax^2-bx}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមាន $-ax^2-bx=-a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)=-a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$=-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}\,dx$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx \quad (*) \text{ ។}$$

តាង $t=x+\frac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dt=dx$ និង $x=t-\frac{b}{2a}$ ហើយ

$x^2=\left(t-\frac{b}{2a}\right)^2=t^2-2\cdot t\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=t^2-\frac{b}{a}t+\frac{b^2}{4a^2}$ ។

បើ $x\to+\infty$ នោះ $t\to+\infty$ ហើយបើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to-\infty$ ។

តាមសមីការ $(*)$ ហើយរូបមន្ត (6.16) , (6.9) និង (6.13) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t^2-\frac{b}{a}t+\frac{b^2}{4a^2}\right)e^{-at^2}\,dt$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2}\,dt-\frac{b}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-at^2}\,dt+\frac{b^2}{4a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt\right]$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}+\frac{b^2\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\left(2a+b^2\right)}{4a^{5/2}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$ ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\left(2a+b^2\right)}{4a^{5/2}}e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.17)$$

ដែល $a>0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-x}\,dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2-3x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.17) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\left(2\cdot 1+1^2\right)}{4\cdot 1^{5/2}}e^{\frac{1^2}{4\cdot 1}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{1}{4}}$$

និង $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2-3x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\left(2\cdot 2+3^2\right)}{4\cdot 2^{5/2}}e^{\frac{3^2}{4\cdot 2}}=\frac{13\sqrt{\pi}}{16\sqrt{2}}e^{\frac{9}{8}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)^2 e^{-4x^2-3x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(2x+5)^2=(2x)^2+2(2x)(5)+5^2=4x^2+20x+25$ ។

នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2x+5)^2 e^{-4x^2-3x}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(4x^2+20x+25\right)e^{-4x^2-3x}\,dx$$

តាមរូបមន្ត (6.17) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-4x^2-3x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\left(2\cdot 4+3^2\right)}{4\cdot 4^{5/2}}e^{\frac{3^2}{4\cdot 4}}=\frac{17\sqrt{\pi}}{4\cdot 32}e^{\frac{9}{16}} \quad (*_2)$$ ។

តាមរូបមន្ត (6.15) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2-3x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}(-3)}{2\cdot 4^{3/2}}e^{\frac{(-3)^2}{4\cdot 4}}=-\frac{3\sqrt{\pi}}{16}e^{\frac{9}{16}} \quad (*_3)$$ ។

ឥឡូវនេះ យើងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2-3x}\,dx$ ។

យើងមាន $-4x^2-3x=-4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}$ ។

តាង $t=x+\frac{3}{8}$ នាំឱ្យ $dt=dx$ ។

បើ $x\to+\infty$ នោះ $t\to+\infty$ ហើយបើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to-\infty$ ។

នាំឱ្យ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2-3x}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}}\,dx$

$$=e^{\frac{9}{16}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}\,dx$$

$$=e^{\frac{9}{16}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t^2}\,dx$$

$$=e^{\frac{9}{16}}\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{9}{16}}\ \ (*_4)\ ។$$

តាម $(*_1)$, $(*_2)$, $(*_3)$ និង $(*_4)$ នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(2x+5)^2e^{-4x^2-3x}\,dx=4\cdot\frac{17\sqrt{\pi}}{4\cdot 32}e^{\frac{9}{16}}+20\cdot\left(-\frac{3\sqrt{\pi}}{16}e^{\frac{9}{16}}\right)+25\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{9}{16}}$$

$$=\frac{297\sqrt{\pi}}{32}e^{\frac{9}{16}}\ ។$$

៦.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-ax^2+bx}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-ax^2+bx}\,dx$ $(a>0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^3e^{-ax^2+bx}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងមាន $-ax^2+bx=-a\left(x^2-2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$=-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a} \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}dx$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx \ (*) \text{ ។}$$

តាង $t=x-\dfrac{b}{2a}$ នាំឱ្យ $dt=dx$ និង $x=t+\dfrac{b}{2a}$ ហើយ

$$x^3=\left(t+\frac{b}{2a}\right)^3=t^3+3\cdot t^2\cdot\frac{b}{2a}+3t\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{b}{2a}\right)^3$$

$$=t^3+\frac{3b}{2a}t^2+\frac{3b^2}{4a^2}t+\frac{b^3}{8a^3} \text{ ។}$$

បើ $x\to+\infty$ នោះ $t\to+\infty$ ហើយបើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to-\infty$ ។

តាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx}dx=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t^3+\frac{3b}{2a}t^2+\frac{3b^2}{4a^2}t+\frac{b^3}{8a^3}\right)e^{-at^2}dt$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^3e^{-at^2}dt+\frac{3b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-at^2}dt+\frac{3b^2}{4a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-at^2}dt+\frac{b^3}{8a^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt\right]$$

$$=e^{\frac{b^2}{4a}}\left[0+\frac{3b}{2a}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}+\frac{3b^2}{4a^2}\cdot 0+\frac{b^3}{8a^3}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]$$

$$=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{b^2}{4a}}\left[\frac{3b}{4a^{5/2}}+\frac{b^3}{8a^{7/2}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}\left(6ab+b^3\right)}{8a^{7/2}}e^{\frac{b^2}{4a}} \text{ ។}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx}dx=\frac{\sqrt{\pi}\left(6ab+b^3\right)}{8a^{7/2}}e^{\frac{b^2}{4a}}} \quad (6.18)$$

ដែល $a>0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2+x}\,dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-9x^2-2x}\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (6.18) នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2+x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\left(6(1)(1)+1^3\right)}{8\cdot 1^{7/2}} e^{\frac{1^2}{4(1)}} = \frac{7\sqrt{\pi}}{8} e^{\frac{1}{4}}$$

និង $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-9x^2-2x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\left(6(9)(-2)+(-2)^3\right)}{8\cdot 9^{7/2}} e^{\frac{(-2)^2}{4(9)}}$$

$$= \frac{-116\sqrt{\pi}}{17496} e^{\frac{1}{9}} = \frac{-29\sqrt{\pi}}{4374} e^{\frac{1}{9}} \text{ ។}$$

ជាសរុប ជំពូកទី៦នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x e^{\alpha x}\,dx$, $\int x a^{\alpha x}\,dx$, $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$, $\int x^2 a^{\alpha x}\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, $\int x^{-1} e^{\alpha x}\,dx$, $\int x e^{\alpha x^2}\,dx$, $\int x a^{\alpha x^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx$, $\int_{0}^{+\infty} x e^{\alpha x^2}\,dx$, $\int x^{-2} e^{-\alpha x^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-b)^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2-bx}\,dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2+bx}\,dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណនៅក្នុងជំពូកទី៧បន្តទៀត។

ជំពូកទី៧

ប្រភេទអាំងតេក្រាលមាន អនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ

(Types of Integrals Involving Logarithmic and Power Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៧នេះ យើងនឹងសិក្សាតែអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៧.១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^m \ln x\, dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^m \ln x\, dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^m \ln x$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^m \ln x\, dx$ តាមវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = \ln x$, $x > 0$ នាំឱ្យ $du = \dfrac{dx}{x}$ និង $dv = x^m\, dx$ នាំឱ្យ $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, $m \neq -1$ ។

នាំឱ្យ $\int x^m \ln x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{1}{m+1}\int x^m\, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

$$= x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] + c} \quad (7.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនា $\int \ln x\,dx$, $\int x\ln x\,dx$ និង $\int x^2 \ln x\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.1) យើងបាន៖

$$\int \ln x\,dx = \int x^0 \ln x\,dx = x^{0+1}\left[\frac{\ln x}{0+1} - \frac{1}{(0+1)^2}\right] + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int x\ln x\,dx = x^{1+1}\left[\frac{\ln x}{1+1} - \frac{1}{(1+1)^2}\right] + c = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right) + c$$

និង $$\int x^2\ln x\,dx = x^{2+1}\left[\frac{\ln x}{2+1} - \frac{1}{(2+1)^2}\right] + c = x^3\left(\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9}\right) + c$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$ និង $\int_1^{+\infty} x^{-3}\ln x\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.1) យើងបាន៖

$$\int_1^e x^3\ln x\,dx = x^{3+1}\left[\frac{\ln x}{3+1} - \frac{1}{(3+1)^2}\right]\Bigg|_1^e = x^4\left[\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right]\Bigg|_1^e$$

$$= e^4\left[\frac{\ln e}{4} - \frac{1}{16}\right] - 1^4\left[\frac{\ln 1}{4} - \frac{1}{16}\right] = \frac{3e^4+1}{16} \approx 10.2996$$

និង $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3}\ln x\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-3}\ln x\,dx$

$$= \lim_{N\to+\infty} x^{-3+1}\left[\frac{\ln x}{-3+1}-\frac{1}{(-3+1)^2}\right]\Bigg|_1^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[\frac{-\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right]\Bigg|_1^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[\frac{-\ln N}{2N^2}-\frac{1}{4N^2}+\frac{\ln 1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4} \text{ ។}$$

៧.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{(\ln(ax))^n}{x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a\neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x>0$ បើ $a>0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x<0$ បើ $a<0$។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{(\ln(ax))^n}{x}dx$ ដែល $a\neq 0$ ។ យើងតា $u=ax$ នាំឱ្យ $x=\frac{u}{a}$ និង $dx=\frac{du}{a}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int \frac{(\ln(ax))^n}{x}dx = \int \frac{(\ln(u))^n}{(u/a)}\cdot\frac{du}{a}$

$$= \int \frac{(\ln(u))^n}{u}du = \int (\ln(u))^n d(\ln(u)) \quad (*) \text{ ។}$$

- បើ $n=-1$ នោះពីសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{(\ln(ax))^n}{x}dx = \int (\ln u)^{-1} d(\ln u) = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u}$$

$$= \ln|\ln u| + c = \ln|\ln(ax)| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{(\ln(ax))^{-1}}{x}dx = \int \frac{dx}{x\ln(ax)} = \ln\left|\ln(ax)\right| + c} \quad (7.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0$ ។

- បើ $n \neq -1$ នោះពីសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{(\ln(ax))^{n}}{x}dx = \int (\ln(u))^{n} d(\ln(u))$$

$$= \frac{(\ln(u))^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(\ln(ax))^{n+1}}{n+1} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{(\ln(ax))^{n}}{x}dx = \frac{(\ln(ax))^{n+1}}{n+1} + c} \quad (7.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a \neq 0, n \neq -1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនា $\int \frac{dx}{x\ln x}$ និង $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.2) និង (7.3) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + c$$

និង $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int_e^{3e} \frac{dx}{x\ln(2x)}$ និង $\int_1^{e} \frac{(\ln 3 + \ln x)^5}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.2) និង (7.3) យើងបាន៖

$$\int_e^{3e} \frac{dx}{x\ln(2x)} = \ln\left|\ln(2x)\right|\Big|_e^{3e} = \ln\left|\ln(6e)\right| - \ln\left|\ln(2e)\right|$$

$$=\ln\left(\frac{\ln 6e}{\ln 2e}\right)\approx 0.5000$$

និង $$\int_1^e \frac{(\ln 3+\ln x)^5}{x}dx=\int_1^e \frac{(\ln 3x)^5}{x}dx=\frac{\left(\ln(3x)\right)^6}{6}\Bigg|_1^e$$

$$=\frac{\left(\ln(3e)\right)^6}{6}-\frac{\left(\ln(3)\right)^6}{6}$$

$$=\frac{(\ln 3e)^6-(\ln 3)^6}{6}\approx 13.9447$$ ។

៧.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{\ln(ax)^n}{x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a\neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x>0$ បើ $a>0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x<0$ បើ $a<0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx$ ដែល $a\neq 0$ ។

- បើ $n=0$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx=\int\frac{\ln(ax)^0}{x}dx=\int\frac{\ln 1}{x}dx=\int 0\,dx=c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n\neq 0$ និង យើងតាង $t=\ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax=e^t$, $x=\frac{1}{a}e^t$ និង $dx=\frac{1}{a}e^t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $$\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx=n\int\frac{\ln(ax)}{x}dx$$

$$=n\int\frac{t}{\left(e^t/a\right)}\cdot\frac{e^t\,dt}{a}$$

$$= n\int t\,dt = n\cdot\frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{n\left(\ln(ax)\right)^2}{2} + c = \frac{\left(\ln(ax)^n\right)^2}{2n} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\frac{\ln(ax)^n}{x}dx = \frac{n\left(\ln(ax)\right)^2}{2} + c = \frac{\left(\ln(ax)^n\right)^2}{2n} + c} \quad (7.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int\frac{\ln x}{x}dx$ និង $\int\frac{\ln x^3}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.4) យើងបាន៖

$$\int\frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

និង $$\int\frac{\ln x^3}{x}dx = \frac{3(\ln x)^2}{2} + c$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int_1^e\frac{\ln x^7}{x}dx$ និង $\int_1^e\frac{\ln 625+\ln x^4}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត(7.4) យើងបាន៖

$$\int_1^e\frac{\ln x^7}{x}dx = \left.\frac{7(\ln x)^2}{2}\right|_1^e = \frac{7(\ln e)^2}{2} - \frac{7(\ln 1)^2}{2} = \frac{7}{2}$$

និង $$\int_1^e\frac{\ln 625+\ln x^4}{x}dx = \int_1^e\frac{\ln 5^4+\ln x^4}{x}dx = \int_1^e\frac{\ln(5x)^4}{x}dx$$

$$= \left.\frac{4\left(\ln(5x)\right)^2}{2}\right|_1^e = 2\left(\ln(5e)\right)^2 - 2(\ln 5)^2 \approx 8.4377$$។

៧.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{\ln(ax)}{x^m}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងតាង $t = \ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax = e^t$, $x = \frac{1}{a}e^t$ និង $dx = \frac{1}{a}e^t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx = \int \frac{t}{\left(e^t/a\right)^m} \cdot \frac{e^t}{a}dt = a^{m-1}\int t\,e^{(1-m)t}\,dt \quad (*)$ ។

- បើ $m = 1$ នោះតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx = \int \frac{\ln(ax)}{x}dx = \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c = \frac{\left(\ln(ax)\right)^2}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $m \neq 1$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក $u = t$ នាំឱ្យ $du = dt$

និង $dv = e^{(1-m)t}\,dt$ នាំឱ្យ $v = -\frac{e^{-(m-1)t}}{m-1}$, $m \neq 1$ ។

នោះតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx = a^{m-1}\int t\,e^{(1-m)t}\,dt$$

$$= a^{m-1}\int u\,dv = a^{m-1}\left(uv - \int v\,du\right)$$

$$= a^{m-1}\left(-\frac{t\,e^{-(m-1)t}}{m-1} + \frac{1}{m-1}\int e^{-(m-1)t}\,dt\right)$$

$$=-\frac{a^{m-1}te^{-(m-1)t}}{m-1}+\frac{a^{m-1}}{m-1}\left(-\frac{e^{-(m-1)t}}{m-1}\right)$$

$$=-\frac{a^{m-1}\ln(ax)(ax)^{-(m-1)}}{m-1}-\frac{a^{m-1}}{(m-1)^2}(ax)^{-(m-1)}+c$$

$$=-\frac{\ln(ax)}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)^2x^{m-1}}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\frac{\ln(ax)}{x^m}dx=-\frac{\ln(ax)}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)^2x^{m-1}}+c}\quad(7.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ, $m\neq 1$ និង $a\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ និង $\int\frac{\ln(2x)}{x^3}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.5) យើងបាន៖

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{(2-1)x^{2-1}}-\frac{1}{(2-1)^2x^{2-1}}+c$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$$

និង $$\int\frac{\ln(2x)}{x^3}dx=-\frac{\ln(2x)}{(3-1)x^{3-1}}-\frac{1}{(3-1)^2x^{3-1}}+c$$

$$=-\frac{\ln(2x)}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int_1^e\frac{\ln(5x)}{x^5}dx$ និង $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(7x)}{x^7}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.5) យើងបាន៖

$$\int_1^e \frac{\ln(5x)}{x^5}dx = -\frac{\ln(5x)}{(5-1)x^{5-1}} - \frac{1}{(5-1)^2 x^{5-1}}\Bigg|_1^e$$

$$= -\frac{\ln(5x)}{4x^4} - \frac{1}{16x^4}\Bigg|_1^e$$

$$= \left(-\frac{\ln(5e)}{4e^4} - \frac{1}{16e^4}\right) - \left(-\frac{\ln(5)}{4} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= -\frac{\ln(5e)}{4e^4} - \frac{1}{16e^4} + \frac{\ln(5)}{4} + \frac{1}{16} \approx 0.4517$$

និង $$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(7x)}{x^7}dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{\ln(7x)}{x^7}dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty} -\frac{\ln(7x)}{(7-1)x^{7-1}} - \frac{1}{(7-1)^2 x^{7-1}}\Bigg|_1^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty} -\frac{\ln(7x)}{6x^6} - \frac{1}{36x^6}\Bigg|_1^N$$

$$= 0 + \frac{\ln(7)}{6} + \frac{1}{36} = \frac{\ln(7)}{6} + \frac{1}{36}$$ ។

៧.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{x\left[\ln(ax)\right]^n}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែល $a \neq 0$ ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ បើ $a > 0$ និងវាកំណត់បានចំពោះ $x < 0$ បើ $a < 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n}$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងតាង $t = \ln(ax)$ នាំឱ្យ $ax = e^t$, $x = \frac{1}{a}e^t$ និង $dx = \frac{1}{a}e^t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n} = \int \frac{1}{\left(e^t / a\right)t^n} \cdot \frac{e^t}{a} dt = \int t^{-n} dt \quad (*)$ ។

- បើ $n=1$ នោះតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n} = \int t^{-1} dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c = \ln\left|\ln(ax)\right| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $n \neq 1$ នោះតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n} = \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$= -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + c = -\frac{1}{(n-1)\left[\ln(ax)\right]^{n-1}} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left[\ln(ax)\right]^{n-1}} + c} \quad (7.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ, $n \neq 1$ និង $a \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ និង $\int \frac{dx}{x(\ln 2x)^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.6) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{(2-1)(\ln x)^{2-1}} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

និង $$\int \frac{dx}{x(\ln 2x)^3} = -\frac{1}{(3-1)\left[\ln(2x)\right]^{3-1}} + c$$

$$= -\frac{1}{2\left[\ln(2x)\right]^2} + c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int_{e}^{2e}\frac{dx}{x(\ln 3x)^4}$ និង $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln ex)^9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.6) យើងបាន៖

$$\int_{e}^{2e}\frac{dx}{x(\ln 3x)^4}=-\frac{1}{(4-1)\left[\ln(3x)\right]^{4-1}}\Bigg|_{e}^{2e}=-\frac{1}{3\left[\ln(3x)\right]^{3}}\Bigg|_{e}^{2e}$$

និង
$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln ex)^9}=\lim_{N\to+\infty}\int_{1}^{N}\frac{dx}{x(\ln ex)^9}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}-\frac{1}{(9-1)\left[\ln(ex)\right]^{9-1}}\Bigg|_{1}^{N}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}-\frac{1}{8\left[\ln(ex)\right]^{8}}\Bigg|_{1}^{N}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}-\frac{1}{8\left[\ln(eN)\right]^{8}}+\frac{1}{8\left[\ln(e)\right]^{8}}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$ ។

៧.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\frac{dx}{x^m\ln x}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{x^m\ln x}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{x^m\ln x}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x>0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{x^m\ln x}$ ដែល $m\in\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ ។

យើងតាង $t=\ln x$ នាំឱ្យ $x=e^t$ និង $dx=e^t\,dt$ ។

នាំឱ្យ $\int\frac{dx}{x^m\ln x}=\int\frac{1}{\left(e^t\right)^m t}\cdot e^t dt=\int\frac{e^{(1-m)t}}{t}dt \quad (*)$ ។

- បើ $m=1$ នោះតាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{x^m \ln x} = \int \frac{e^{(1-1)t}}{t} dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $m \geq 2$ និងយើងមាន

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R} \ ។$$

នាំឱ្យ $\quad \dfrac{e^{(1-m)t}}{t} = \dfrac{1}{t}\left(1 + (1-m)t + \dfrac{\left[(1-m)t\right]^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\left[(1-m)t\right]^n}{n!} + \ldots\right)$

នោះតាមសមីការ $(*)$ និង $(*_1)$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{dx}{x^m \ln x} = \int \frac{e^{(1-m)t}}{t} dt = \int [\frac{1}{t} + (1-m) + \frac{(1-m)^2}{2!} t + \ldots + \frac{(1-m)^n}{n!} t^{n-1} + \ldots] dt$$

$$= \ln|t| + (1-m)t + \frac{(1-m)^2}{2!} \cdot \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{(1-m)^n}{n!} \cdot \frac{t^n}{n} + \ldots$$

$$= \ln|t| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-m)^k}{k!} \cdot \frac{t^k}{k}$$

$$= \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k \ ។$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^m \ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (m-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k} \quad (7.7)$$

ដែល $m \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int \frac{dx}{x^2 \ln x}$ និង $\int \frac{dx}{x^5 \ln x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.7) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{x^2 \ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k$$

និង $$\int \frac{dx}{x^5 \ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{k \cdot k!} (\ln x)^k$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int \frac{dx}{x^3 \ln(3x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t = 3x$ នាំឱ្យ $x = \frac{t}{3}$ និង $dx = \frac{dt}{3}$ ។

នាំឱ្យ $$\int \frac{dx}{x^3 \ln(3x)} = \int \frac{dt/3}{(t/3)^3 \ln t}$$

$$= \frac{3^3}{3} \int \frac{dt}{t^3 \ln t} = 9 \int \frac{dt}{t^3 \ln t}$$

$$= 9\,[\ln|\ln t| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k \cdot k!} (\ln t)^k\,]$$ (តាមរូបមន្ត (7.7))

$$= 9 \ln|\ln(3x)| + 9 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k \cdot k!} (\ln(3x))^k$$ ។

៧.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int x^m (\ln x)^n dx$

អាំងតេក្រាល $\int x^m (\ln x)^n dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $x^m (\ln x)^n$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x > 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int x^m (\ln x)^n dx$ ដែល $n \in \{0,1,2,3,...\}$ ។

- ករណី $m = -1$ នាំឱ្យ

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \int x^{-1} (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n \frac{dx}{x}$$

$$=\int (\ln x)^n \, d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $m \neq -1$ និង $n = 0$ នាំឱ្យ

$$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \int x^m (\ln x)^0 \, dx$$

$$= \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $m \neq -1$ ។

- ករណី $m \neq -1$ និង $n \in \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ដោយយក $u = (\ln x)^n$, $x > 0$ នាំឱ្យ $du = \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx$ និង $dv = x^m \, dx$ នាំឱ្យ $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, $m \neq -1$ ។

នាំឱ្យ $\int x^m (\ln x)^n \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} \frac{(\ln x)^{n-1}}{x} dx$$

$$= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx \text{ ។}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $m \neq -1$ និង $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ យើងបានរូបមន្តខាងក្រោម៖

$$\boxed{\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx} \quad (7.8) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int x \ln x \, dx$ និង $\int x^{-5} \ln x \, dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^{1+1}(\ln x)^1}{1+1} - \frac{1}{1+1} \int x^1 (\ln x)^{1-1} \, dx$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x^1\,dx$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+c$$

$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+c$$

និង $\int x^{-5}\ln x\,dx=\frac{x^{-5+1}(\ln x)^1}{-5+1}-\frac{1}{-5+1}\int x^{-5}(\ln x)^{1-1}\,dx$

$$=\frac{x^{-4}\ln x}{-4}+\frac{1}{4}\int x^{-5}\,dx$$

$$=\frac{x^{-4}\ln x}{-4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+c$$

$$=-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{16x^4}+c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$ និង $\int_1^e x^2(\ln x)^3\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx=\left.\frac{x^{1+1}(\ln x)^2}{1+1}\right|_1^e-\frac{2}{1+1}\int_1^e x^1(\ln x)^{2-1}\,dx$$

$$=\frac{e^2(\ln e)^2}{2}-\frac{1^2(\ln 1)^2}{2}-\int_1^e x^1(\ln x)^1\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^{1+1}(\ln x)^1}{1+1}\right|_1^e+\frac{1}{1+1}\int_1^e x^1(\ln x)^{1-1}\,dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2(\ln e)^1}{2}+\frac{1^2(\ln 1)^1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^e x^1\,dx$$

$$=0+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e=\frac{e^2}{4}-\frac{1^2}{4}=\frac{e^2-1}{4}\approx 1.5972$$

និង $$\int_1^e x^2(\ln x)^3\,dx = \left.\frac{x^{2+1}(\ln x)^3}{2+1}\right|_1^e - \frac{3}{2+1}\int_1^e x^2(\ln x)^{3-1}\,dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left.\frac{x^{2+1}(\ln x)^2}{2+1}\right|_1^e + \frac{2}{2+1}\int_1^e x^2(\ln x)^{2-1}\,dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3(\ln e)^2}{3} + \frac{1^3(\ln 1)^2}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x^{2+1}(\ln x)^1}{2+1}\right|_1^e - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2+1}\int_1^e x^2(\ln x)^{1-1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{e^3(\ln e)^1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1^3(\ln 1)^1}{3} - \frac{2}{9}\int_1^e x^2\,dx$$

$$= \frac{4e^3+2}{27} \approx 3.0497 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int_1^{+\infty} x^{-6}(\ln x)^3\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.8) យើងបាន៖

$$\int_1^{+\infty} x^{-6}(\ln x)^3\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-6}(\ln x)^3\,dx$$

$$= 0 + \frac{3}{5}\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-6}(\ln x)^2\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{N\to+\infty}\frac{N^{-5}(\ln N)^2}{-5} - \frac{1^{-5}(\ln 1)^2}{-5} + \frac{6}{25}\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-6}(\ln x)^1\,dx$$

$$= 0 + \frac{6}{25}\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-6}(\ln x)^1\,dx$$

$$=\frac{6}{25}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{x^{-6+1}(\ln x)^1}{-6+1}\right|_1^N-\frac{6}{25}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{-6+1}\int_1^N x^{-6}(\ln x)^{1-1}dx$$

$$=\frac{6}{25}\lim_{N\to+\infty}\frac{N^{-5}\ln N}{-5}-\frac{1^{-5}\ln 1}{-5}+\frac{6}{125}\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-6}dx$$

$$=\frac{6}{25}\cdot 0+\frac{6}{125}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{x^{-5}}{-5}\right|_1^N$$

$$=\frac{6}{125}\lim_{N\to+\infty}\frac{N^{-5}}{-5}-\frac{1^{-5}}{-5}=\frac{6}{125}\left(0+\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{625}$$ ។

៧.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\frac{x^m}{(\ln x)^n}dx$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{x^m}{(\ln x)^n}dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{x^m}{(\ln x)^n}$ ជាអនុគមន៍ចម្រុះដែលក្នុងនោះមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណ។ អនុគមន៍នេះកំណត់បានចំពោះ $x>0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{x^m}{(\ln x)^n}dx$ ដែល $n\in\{0,1,2,3,\dots\}$ ។

- ករណី $n=0$ និង $m=-1$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{x^m}{(\ln x)^n}dx=\int\frac{x^{-1}}{(\ln x)^0}dx$$

$$=\int x^{-1}dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=0$ និង $m\neq-1$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{x^m}{(\ln x)^n}dx=\int\frac{x^m}{(\ln x)^0}dx$$

$$=\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=1$ និង $m=-1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx = \int \frac{x^{-1}}{\ln x}dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $n=1$ និង $m \neq -1$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx = \int \frac{x^m}{\ln x}dx$$

(ករណីនេះ យើងខ្ញុំមិនអាចគណនាវាបាន ហេតុនេះយើងខ្ញុំនឹងស្រាវជ្រាវវាបន្ត)។

- ករណី $n \in \{2,3,4,...\}$ យើងប្រើវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$u = x^{m+1}$ នាំឱ្យ $du = (m+1)x^m dx$ និង $dv = \dfrac{dx}{x(\ln x)^n}$ នាំឱ្យ $v = \dfrac{(\ln x)^{-n+1}}{-n+1}$

$= -\dfrac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{(m+1)}{n-1}\int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}}dx \text{ ។}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $n \in \{2,3,4,...\}$ យើងបានរូបមន្តខាងក្រោម៖

$$\boxed{\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{(m+1)}{n-1}\int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}}dx} \quad (7.9) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\displaystyle\int \frac{x}{(\ln x)^2}dx$ និង $\displaystyle\int \frac{x}{(\ln x)^3}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (7.9) យើងបាន៖

$$\int \frac{x}{(\ln x)^2}dx = -\frac{x^{1+1}}{(2-1)(\ln x)^{2-1}} + \frac{(1+1)}{2-1}\int \frac{x^1}{(\ln x)^{2-1}}dx$$

$$=-\frac{x^2}{\ln x}+2\int\frac{x}{\ln x}dx \quad (*)$$ ។

បន្ទាប់មក យើងតាង $u=\ln x$ នាំឱ្យ $x=e^u$ និង $dx=e^u\,du$ ។

ពីសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{x}{\ln x}dx=\int\frac{e^u}{u}\cdot e^u\,du=\int\frac{e^{2u}}{u}du$$

$$=\int\frac{1}{u}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2u)^k}{k!}du=\int[\frac{1}{u}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k u^{k-1}}{k!}]du$$

$$=\ln|u|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k u^k}{k\cdot k!}$$

$$=\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k(\ln x)^k}{k\cdot k!}$$

និង $$\int\frac{x}{(\ln x)^2}dx=-\frac{x^2}{\ln x}+2\int\frac{x}{\ln x}dx$$

$$=-\frac{x^2}{\ln x}+2[\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k(\ln x)^k}{k\cdot k!}]$$

$$=-\frac{x^2}{\ln x}+2\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}(\ln x)^k}{k\cdot k!} \quad (*_1)$$ ។

តាមរូបមន្ត (7.9) យើងបាន៖

$$\int\frac{x}{(\ln x)^3}dx=-\frac{x^{1+1}}{(3-1)(\ln x)^{3-1}}+\frac{(1+1)}{3-1}\int\frac{x}{(\ln x)^{3-1}}dx$$

$$=-\frac{x^2}{2(\ln x)^2}+\int\frac{x}{(\ln x)^2}dx$$

$$=-\frac{x^2}{2(\ln x)^2}-\frac{x^2}{\ln x}+2\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}(\ln x)^k}{k\cdot k!}$$ (តាម $(*_1)$)។

ជាសរុប ជំពូកទី៧នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x^m \ln x\, dx$, $\int \frac{\left(\ln(a\,x)\right)^n}{x}dx$, $\int \frac{\ln(a\,x)^n}{x}dx$, $\int \frac{\ln(a\,x)}{x^m}dx$, $\int \frac{dx}{x\left[\ln(a\,x)\right]^n}$, $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$, $\int x^m (\ln x)^n\, dx$ និង $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ បន្ទាប់មក យើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកនៅក្នុងជំពូកទី៨បន្តទៀត។

ជំពូកទី៨
ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក
(Types of Integrals Involving Hyperbolic Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៨នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកនិងប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានលក្ខណៈពិសេសមួយចំនួននិងដំណោះស្រាយរបស់វាដូចតទៅ៖

៨.១ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក

៨.១.១ និយមន័យ

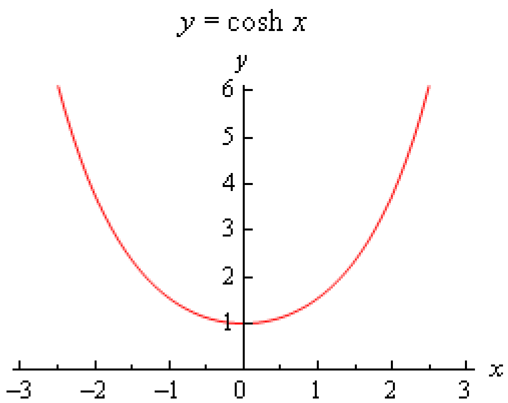
អនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកមានដូចជា $\cosh$, $\sinh$, $\tanh$, $\coth$, $\sec h$ និង $\cos ech$ ហើយកំណត់ដោយ៖

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

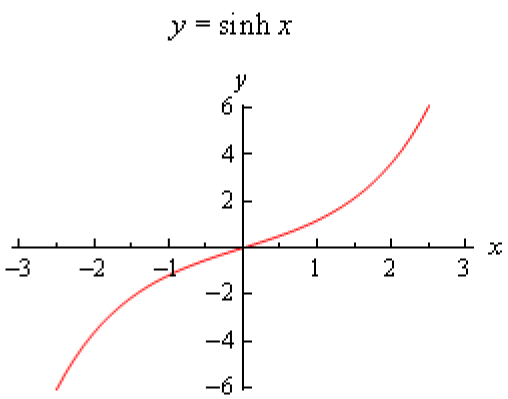
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\sec h x = \frac{1}{\cosh x} \quad \text{និង} \quad \cos ech x = \frac{1}{\sinh x} \text{ ។}$$

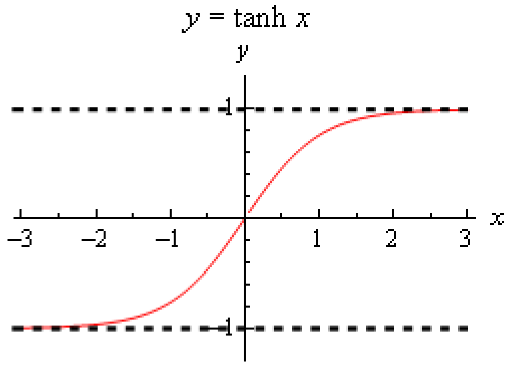
រូបខាងក្រោម ជាក្រាហ្វនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក $y = \cosh x$, $y = \sinh x$ និង $y = \tanh x$ ។



រូបទី១



រូបទី២



រូបទី៣

៨.១.២ លក្ខណៈ

យើងមានរូបមន្តសំខាន់នៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកមួយចំនួនខាងក្រោម៖

១. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

២. $1 - \tanh^2 x = \sec h^2 x$

៣. $1 - \coth^2 x = -\cos ech^2 x$

៤. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = (\sinh x)'_x = \cosh x$

៥. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = (\cosh x)'_x = \sinh x$

៦. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = (\tanh x)'_x = \text{sech}^2 x$

៧. $\frac{d}{dx}(\coth x) = (\coth x)'_x = -co\text{sech}^2 x$

ឥឡូវនេះ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទី១ ទី២ និង ទី៤ដូចតទៅ៖

១. បង្ហាញថា $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ។

យើងមាន $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}=1$$ (ពិត)។

២. បង្ហាញថា $1-\tanh^2 x=\mathrm{sec}h^2 x$ ។

យើងមាន $$1-\tanh^2 x=1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2=1-\left(\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)/2}{\left(e^x+e^{-x}\right)/2}\right)^2$$

$$=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x e^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^x e^{-x}-e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\cosh^2 x}=\mathrm{sec}h^2 x$$ (ពិត) ។

៤. បង្ហាញថា $\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)=\cosh x$ ។

យើងមាន $$\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$$ (ពិត) ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គេឱ្យ $\sinh x_0=4$ ។ ចូររកតម្លៃនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកប្រាំផ្សេងទៀតត្រង់ចំណុច x_0 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sinh x_0=4$ និងរូបមន្ត $\cosh^2 x_0-\sinh^2 x_0=1$ នាំឱ្យ

$$\cosh^2 x_0=1+\sinh^2 x_0=1+4^2=17$$ ។

ដោយ $\cosh x_0=\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}>0\,,\ \forall x_0\in\mathbb{R}$ នាំឱ្យ $\cosh x_0=\sqrt{17}$ ។

ពីរូបមន្តនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក យើងទាញបាន៖

$$\tanh x_0=\frac{\sinh x_0}{\cosh x_0}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\coth x_0 = \frac{\cosh x_0}{\sinh x_0} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\sec h\, x_0 = \frac{1}{\cosh x_0} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

និង $\cos ech\, x_0 = \dfrac{1}{\sinh x_0} = \dfrac{1}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ ដោះស្រាយសមីការ $5\cosh x + 3\sinh x = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $5\cosh x + 3\sinh x = 4$

សមមូល $5\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + 3\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 4$

សមមូល $5e^x + 5e^{-x} + 3e^x - 3e^{-x} = 8$

សមមូល $8e^x + 2e^{-x} = 8$

សមមូល $4e^x + e^{-x} = 4$

សមមូល $4\left(e^x\right)^2 + 1 = 4e^x$

សមមូល $4\left(e^x\right)^2 - 4e^x + 1 = 0$

សមមូល $\left(2e^x - 1\right)^2 = 0$ សមមូល $2e^x - 1 = 0$

សមមូល $e^x = \dfrac{1}{2}$ សមមូល $x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ ជាឫសសមីការ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាដេរីវេ $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh\left(a x\right)\right)$ និង $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh\left(a x\right)\right)$ ដែល a ជាចំនួនពិតថេរ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh\left(a x\right)\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{a x} - e^{-a x}}{2}\right) = \dfrac{a e^{a x} + a e^{-a x}}{2}$

$$= a\left(\frac{e^{a x} + e^{-a x}}{2}\right) = a \cosh\left(a x\right)$$

និង $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh\left(a x\right)\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{a x} + e^{-a x}}{2}\right) = \dfrac{a e^{a x} - a e^{-a x}}{2}$

$$=a\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)=a\sinh(ax)$$ ។

ដូចនេះ $\frac{d}{dx}\left(\sinh(ax)\right)=a\cosh(ax)$ និង $\frac{d}{dx}\left(\cosh(ax)\right)=a\sinh(ax)$ ។

៨.២ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\sinh(ax)dx$

អាំងតេក្រាល $\int\sinh(ax)dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sinh(ax)$ ជាអនុគមន៍ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\sinh(ax)dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int\sinh(ax)dx=\int\sinh(0)dx=\int\frac{e^{0}-e^{-0}}{2}dx=\int 0\,dx=c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int\sinh(ax)dx=\int\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{(-a)}e^{-ax}\right]+c$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}+c=\frac{1}{a}\cosh(ax)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\sinh(ax)dx=\frac{1}{a}\cosh(ax)+c}\quad(8.1)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនា $\int\sinh(2x)dx$ និង $\int_0^1\sinh\left(\frac{3}{2}x\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.1) យើងបាន៖

$$\int \sinh(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cosh(2x) + c$$

និង $$\int_0^1 \sinh\left(\frac{3}{2}x\right)dx = \frac{1}{(3/2)}\cosh\left(\frac{3}{2}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\cosh\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}\cosh(0)$$

$$= \frac{2}{3}\cosh\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3} \approx 0.9016$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៥ គណនា $\int \sinh(2x+3)\,dx$ និង $\int_0^2 x\sinh\left(\frac{3}{2}x^2+4\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 2x+3$ នាំឱ្យ $du = 2dx$ និង $dx = \frac{du}{2}$ ។

នាំឱ្យ $$\int \sinh(2x+3)\,dx = \int \sinh u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sinh u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cosh u + c = \frac{1}{2}\cosh(2x+3) + c$$ (តាមរូបមន្ត (8.1))។

ចំពោះ $\int_0^2 x\sinh\left(\frac{3}{2}x^2+4\right)dx$ យើងតាង $u = \frac{3}{2}x^2+4$ នាំឱ្យ $du = 3x\,dx$ និង $x\,dx = \frac{du}{3}$ ។

ពេល $x=0$ នោះ $u = \frac{3}{2}x^2+4 = 4$ និងពេល $x=2$ នោះ $u = \frac{3}{2}x^2+4 = 10$ ។

នាំឱ្យ $$\int_0^2 x\sinh\left(\frac{3}{2}x^2+4\right)dx = \int_4^{10} \sinh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_4^{10} \sinh u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cosh u\Big|_4^{10}$$ (តាមរូបមន្ត (8.1))

$$= \frac{1}{3}(\cosh 10 - \cosh 4) \approx 3661.9748$$ ។

៨.៣ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh(ax)dx$

អាំងតេក្រាល $\int \cosh(ax)dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\cosh(ax)$ ជាអនុគមន៍កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \cosh(ax)dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh(ax)dx = \int \cosh(0)dx = \int \frac{e^{0}+e^{-0}}{2}dx = \int 1dx = x+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh(ax)dx = \int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{ax} + \frac{1}{(-a)}e^{-ax}\right]+c$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}+c = \frac{1}{a}\sinh(ax)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \cosh(ax)dx = \frac{1}{a}\sinh(ax)+c} \quad (8.2)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី៦ គណនា $\int \cosh(3x)dx$ និង $\int_0^1 \cosh\left(\frac{4}{5}x\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.2) យើងបាន៖

$$\int \cosh(3x)dx = \frac{1}{3}\sinh(3x)+c$$

និង $\int_0^1 \cosh\left(\frac{4}{5}x\right)dx = \frac{1}{(4/5)}\sinh\left(\frac{4}{5}x\right)\Big|_0^1$

$$= \frac{5}{4}\sinh\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{5}{4}\sinh(0)$$

$$= \frac{5}{4}\sinh\left(\frac{4}{5}\right) \approx 1.1101 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនា $\int \cosh(3v-2)dv$ និង $\int_0^1 t^2\cosh\left(-t^3+3\right)dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 3v-2$ នាំឱ្យ $du = 3dv$ និង $dv = \frac{du}{3}$ ។

នាំឱ្យ $\int \cosh(3v-2)dv = \int \cosh u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \cosh u\, du$

$$= \frac{1}{3}\sinh u + c = \frac{1}{3}\sinh(3v-2) + c$$ (តាមរូបមន្ត (8.2))។

ចំពោះ $\int_0^1 t^2\cosh\left(-t^3+3\right)dt$ យើងតាង $u = -t^3+3$ នាំឱ្យ $du = -3t^2\,dt$ និង $t^2\,dt = -\frac{du}{3}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=-t^3+3=3$ និងពេល $t=1$ នោះ $u=-t^3+3=2$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^1 t^2\cosh\left(-t^3+3\right)dt = \int_3^2 \cosh u\left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3}\int_3^2 \cosh u\, du$

$$= -\frac{1}{3}\sinh u\Big|_3^2$$ (តាមរូបមន្ត (8.2))

$$= -\frac{1}{3}(\sinh 2 - \sinh 3) \approx 2.1303 \text{ ។}$$

៨.៤ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \sinh^2(ax)dx$

អាំងតេក្រាល $\int \sinh^2(ax)dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\sinh^2(ax)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sinh^2(ax)dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \sinh^2(ax)dx = \int \sinh^2(0)dx = \int \left(\frac{e^0-e^{-0}}{2}\right)^2 dx = \int 0\,dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int \sinh^2(ax)dx = \int \left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left((e^{ax})^2 - 2e^{ax}e^{-ax} + (e^{-ax})^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2a}e^{2ax} - 2x + \frac{1}{(-2a)}e^{-2ax}\right] + c$$

$$= \frac{1}{4a}\sinh(2ax) - \frac{x}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \sinh^2(ax)dx = \frac{1}{4a}\sinh(2ax) - \frac{x}{2} + c} \quad (8.3)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី៨ គណនា $\int \sinh^2(2x)dx$ និង $\int \sinh^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.3) យើងបាន៖

$$\int \sinh^2(2x)dx = \frac{1}{4\cdot 2}\sinh(2\cdot 2x) - \frac{x}{2} + c$$

$$=\frac{1}{8}\sinh(4x)-\frac{x}{2}+c$$

និង $\int \sinh^2\left(\frac{3x}{2}\right)dx=\frac{1}{4(3/2)}\sinh\left(2(3/2)x\right)-\frac{x}{2}+c$

$$=\frac{1}{6}\sinh(3x)-\frac{x}{2}+c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៩ គណនា $\int \sinh^2(3y-5)dy$ និង $\int_0^2 t\sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right)dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=3y-5$ នាំឱ្យ $du=3dy$ និង $dy=\frac{du}{3}$ ។

នាំឱ្យ $\int \sinh^2(3y-5)dy=\int \sinh^2 u\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int \sinh^2 u\,du$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\sinh(2u)-\frac{u}{2}\right]+c_1 \text{ (តាមរូបមន្ត (8.3))}$$

$$=\frac{1}{12}\sinh\left(2(3y-5)\right)-\frac{(3y-5)}{6}+c_1$$

$$=\frac{1}{12}\sinh(6y-10)-\frac{y}{2}+c \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_0^2 t\sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right)dt$ យើងតាង $u=\frac{5t^2+4}{2}$ នាំឱ្យ $du=5t\,dt$ និង $t\,dt=\frac{du}{5}$ ។

ពេល $t=0$ នោះ $u=\frac{5t^2+4}{2}=2$ និងពេល $t=2$ នោះ $u=\frac{5t^2+4}{2}=12$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^2 t\sinh^2\left(\frac{5t^2+4}{2}\right)dt=\int_2^{12}\sinh^2 u\left(\frac{du}{5}\right)=\frac{1}{5}\int_2^{12}\sinh^2 u\;du$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\sinh(2u)-\frac{u}{2}\right)\Bigg|_2^{12} \text{ (តាមរូបមន្ត (8.3))}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\sinh(2\cdot 12)-\frac{12}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\sinh(2\cdot 2)-\frac{2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{20}\sinh 24-\frac{1}{20}\sinh 4-1\approx 662228050.9 \text{ ។}$$

៨.៥ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cosh^2(ax)dx$

អាំងតេក្រាល $\int \cosh^2(ax)dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\cosh^2(ax)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \cosh^2(ax)dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh^2(ax)dx = \int \cosh^2(0)dx = \int\left(\frac{e^0+e^{-0}}{2}\right)^2 dx = \int 1dx = x+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int \cosh^2(ax)dx = \int\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\left((e^{ax})^2 + 2e^{ax}e^{-ax} + (e^{-ax})^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2a}e^{2ax} + 2x + \frac{1}{(-2a)}e^{-2ax}\right] + c$$

$$= \frac{1}{4a}\sinh(2ax) + \frac{x}{2} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \cosh^2(ax)dx = \frac{1}{4a}\sinh(2ax) + \frac{x}{2} + c} \quad (8.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១០ គណនា $\int \cosh^2(7x)dx$ និង $\int \cosh^2\left(-\frac{9x}{4}\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.4) យើងបាន៖

$$\int \cosh^2(7x)dx = \frac{1}{4\cdot 7}\sinh(2\cdot 7x) + \frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{28}\sinh(14x) + \frac{x}{2} + c$$

និង $$\int \cosh^2\left(-\frac{9x}{4}\right)dx = \frac{1}{4(-9/4)}\sinh(2(-9/4)x) + \frac{x}{2} + c$$

$$= -\frac{1}{9}\sinh\left(\frac{-9x}{2}\right) + \frac{x}{2} + c \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១១ គណនា $\int_0^1 \cosh^2(4y-7)\,dy$ និង $\int_0^2 (2t-3)\cosh^2\left(2t^2-6t+5\right)dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 4y-7$ នាំឱ្យ $du = 4dy$ និង $dy = \frac{du}{4}$ ។

ពេល $y=0$ នោះ $u = 4y-7 = -7$ និងពេល $y=1$ នោះ $u = 4y-7 = -3$ ។

នាំឱ្យ $$\int_0^1 \cosh^2(4y-7)\,dy = \int_{-7}^{-3} \cosh^2 u\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int_{-7}^{-3} \cosh^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sinh(2u) + \frac{u}{2}\right]\Bigg|_{-7}^{-3}$$ (តាមរូបមន្ត (8.4))

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sinh(-6) + \frac{-3}{2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sinh(-14) + \frac{-7}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\sinh(-6) - \frac{1}{16}\sinh(-14) + \frac{1}{2} \approx 37569.2768 \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_0^2 (2t-3)\cosh^2\left(2t^2-6t+5\right)dt$ យើងតាង $u = 2t^2-6t+5$ នាំឱ្យ

$du = (4t-6)dt = 2(2t-3)dt$ និង $(2t-3)dt = \frac{du}{2}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ

$u = 2t^2-6t+5 = 5$ និងពេល $t=2$ នោះ $u = 2t^2-6t+5 = 1$ ។ នាំឱ្យ

$$\int_0^2 (2t-3)\cosh^2\left(2t^2-6t+5\right)dt = \int_5^1 \cosh^2 u \left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_5^1 \cosh^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sinh(2u)+\frac{u}{2}\right)\Bigg|_5^1 \text{ (តាមរូបមន្ត (8.4))}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sinh(2)+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sinh(10)+\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\sinh 2-\frac{1}{8}\sinh 10-1 \approx -1377.2007 \text{ ។}$$

៨.៦ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \tanh(ax)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \tanh(ax)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\tanh(ax)$ ជាអនុគមន៍តង់ហ្សង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \tanh(ax)\,dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \tanh(ax)\,dx = \int \tanh(0)\,dx = \int \frac{\sinh(0)}{\cosh(0)}dx = \int 0\,dx = c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ នាំឱ្យ

$$\int \tanh(ax)\,dx = \int \frac{\sinh(ax)}{\cosh(ax)}dx \quad (*) \text{ ។}$$

តាង $u=\cosh(ax)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$ នាំឱ្យ $du=\dfrac{ae^{ax}+(-a)e^{-ax}}{2}dx = a\left(\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)dx$

$= a\sinh(ax)dx$ និង $\sinh(ax)dx=\dfrac{du}{a}$ ។

តាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int \tanh(ax)\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{a}\ln|u|+c = \frac{1}{a}\ln\left|\cosh(ax)\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left(\cosh(ax)\right)+c$$

(ពីព្រោះ $\cosh(ax)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}>0\,,\forall x\in\mathbb{R}$) ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \tanh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\ln\left(\cosh(ax)\right)+c}\quad (8.5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១២ គណនា $\int \tanh(3x)\,dx$ និង $\int_0^1 \tanh\left(\frac{5x}{3}\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.5) យើងបាន៖

$$\int \tanh(3x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\left(\cosh(3x)\right)+c$$

និង

$$\int_0^1 \tanh\left(\frac{5x}{3}\right)dx=\frac{1}{(5/3)}\ln\left(\cosh\left(\frac{5x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{3}{5}\ln\left(\cosh\left(\frac{5}{3}\right)\right)-\frac{3}{5}\ln\left(\cosh(0)\right)$$

$$=\frac{3}{5}\ln\left(\cosh\left(\frac{5}{3}\right)\right)\approx 0.6051 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៣ គណនា $\int \tanh(3t-5)\,dt$ និង $\int_{-1}^{1} u^2\tanh\left(4u^3+7\right)du$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=3t-5$ នាំឱ្យ $du=3dt$ និង $dt=\dfrac{du}{3}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int \tanh(3t-5)\,dt=\int \tanh u\,\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int \tanh u\,du$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(\cosh u\right)+c \quad \text{(តាមរូបមន្ត (8.5))}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(\cosh(3t-5)\right)+c \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_{-1}^{1} u^2 \tanh\left(4u^3+7\right) du$ យើងតាង $t=4u^3+7$ នាំឱ្យ $dt=12u^2\,du$ និង

$u^2\,du=\dfrac{dt}{12}$ ។ ពេល $u=-1$ នោះ $t=4u^3+7=3$ និងពេល $u=1$ នោះ $t=4u^3+7=11$ ។

នាំឱ្យ $$\int_{-1}^{1} u^2 \tanh\left(4u^3+7\right) du=\int_{3}^{11}\tanh t\,\frac{dt}{12}=\frac{1}{12}\int_{3}^{11}\tanh t\,dt$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left(\cosh t\right)\Big|_{3}^{11}$$ (តាមរូបមន្ត (8.5))

$$=\frac{1}{12}\ln\left(\cosh 11\right)-\frac{1}{12}\ln\left(\cosh 3\right)\approx 0.6664$$ ។

៨.៧ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \coth(ax)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \coth(ax)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\coth(ax)$ ជាអនុគមន៍កូតង់ហ្សង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់ចំពោះ $x\neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \coth(ax)\,dx$ ចំពោះ $a\neq 0$ ។

យើងមាន $\int \coth(ax)\,dx=\int \dfrac{\cosh(ax)}{\sinh(ax)}dx \quad (*)$ ។

តាង $u=\sinh(ax)=\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ នាំឱ្យ $du=\dfrac{a e^{ax}-(-a)e^{-ax}}{2}dx=a\left(\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)dx$

$=a\cosh(ax)\,dx$ និង $\cosh(ax)\,dx=\dfrac{du}{a}$ ។

តាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int \coth(ax)\,dx=\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{a}\ln|u|+c=\frac{1}{a}\ln\left|\sinh(ax)\right|+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \coth(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sinh(ax)\right| + c} \quad (8.6)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១៤ គណនា $\int \coth(-5x)\,dx$ និង $\int_1^2 \coth\left(\frac{8x}{5}\right) dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.6) យើងបាន៖

$$\int \coth(-5x)\,dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\sinh(-5x)\right| + c$$

និង $$\int_1^2 \coth\left(\frac{8x}{5}\right) dx = \frac{1}{(8/5)}\ln\left|\sinh\left(\frac{8x}{5}\right)\right|\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{5}{8}\ln\left(\sinh\left(\frac{16}{5}\right)\right) - \frac{5}{8}\ln\left(\sinh\left(\frac{8}{5}\right)\right) \approx 1.0249 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៥ គណនា $\int \coth(12x+123)\,dx$ និង $\int_0^1 t^4 \coth\left(2t^5+7\right) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = 12x + 123$ នាំឱ្យ $du = 12\,dx$ និង $dx = \frac{du}{12}$ ។

នាំឱ្យ $$\int \coth(12x+123)\,dx = \int \coth u \,\frac{du}{12} = \frac{1}{12}\int \coth u\,du$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\sinh u\right| + c \quad (\text{តាមរូបមន្ត (8.6)})$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\sinh(12x+123)\right| + c \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_0^1 t^4 \coth\left(2t^5+7\right) dt$ យើងតាង $u = 2t^5 + 7$ នាំឱ្យ $du = 10t^4\,dt$ និង $\frac{du}{10} = t^4\,dt$ ។ ពេល $t = 0$ នោះ $u = 2t^5 + 7 = 7$ និងពេល $t = 1$ នោះ $u = 2t^5 + 7 = 9$ ។

នាំឱ្យ $$\int_0^1 t^4 \coth\left(2t^5+7\right) dt = \int_7^9 \coth u\,\frac{du}{10} = \frac{1}{10}\int_7^9 \coth u\,du$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\sinh u\right|\Big|_7^9 \text{ (តាមរូបមន្ត (8.6))}$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\sinh 9\right| - \frac{1}{10}\ln\left|\sinh 7\right|$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\sinh 9}{\sinh 7}\right| \approx 0.2000 \text{ ។}$$

៨.៨ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\operatorname{sech}(a\,x)$ ជាអនុគមន៍សេកង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$ ។

យើងមាន $\operatorname{sech}(a\,x) = \dfrac{1}{\cosh(a\,x)} = \dfrac{2}{e^{a\,x}+e^{-a\,x}} = \dfrac{2e^{a\,x}}{\left(e^{a\,x}\right)^2+1}$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx = \int \operatorname{sech}(0)\,dx = \int \frac{2}{e^0+e^0}\,dx = \int 1dx = x+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ យើងតាង $t=e^{a\,x}$ នាំឱ្យ $dt = a\,e^{a\,x}\,dx$ និង $e^{a\,x}\,dx = \dfrac{dt}{a}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle \int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx = \int \frac{2e^{a\,x}\,dx}{\left(e^{a\,x}\right)^2+1} = \int \frac{2}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{a}$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{a}\arctan t + c$$

$$= \frac{2}{a}\arctan e^{a\,x} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន $\cosh^2(a\,x)-\sinh^2(a\,x)=1$ នាំឱ្យ $\cosh^2(a\,x)=\sinh^2(a\,x)+1$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle \int \operatorname{sech}(a\,x)\,dx = \int \frac{1}{\cosh(a\,x)}\,dx = \int \frac{\cosh(a\,x)}{\cosh^2(a\,x)}\,dx$

$$= \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh^2(ax)+1}\, dx \quad (*)$$ ។

បន្ទាប់មក យើងតាង $t = \sinh(ax) = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ នាំឱ្យ $dt = \dfrac{ae^{ax}-(-a)e^{-ax}}{2}dx$
$= a\left(\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)dx = a\cosh(ax)dx$ និង $\cosh(ax)dx = \dfrac{dt}{a}$ ។

តាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int \operatorname{sech}(ax)\, dx = \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh^2(ax)+1}\, dx = \int \frac{1}{t^2+1}\, \frac{dt}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\arctan t + c_1$$

$$= \frac{1}{a}\arctan(\sinh(ax)) + c_1$$

ដែល c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a \neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int \operatorname{sech}(ax)\, dx = \frac{2}{a}\arctan e^{ax} + c = \frac{1}{a}\arctan(\sinh(ax)) + c_1} \quad (8.7)$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ គណនា $\int \operatorname{sech}(6x)\, dx$ និង $\int_0^1 \operatorname{sech}\left(\dfrac{-3t}{2}\right) dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.7) យើងបាន៖

$$\int \operatorname{sech}(6x)\, dx = \frac{2}{6}\arctan e^{6x} + c = \frac{1}{3}\arctan e^{6x} + c$$

និង
$$\int_0^1 \operatorname{sech}\left(\frac{-3t}{2}\right) dt = \frac{2}{(-3/2)}\arctan e^{-\frac{3t}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{4}{3}\arctan e^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\arctan e^{0}$$

$$=-\frac{4}{3}\arctan e^{-\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=-\frac{4}{3}\arctan e^{-\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{3}\approx 0.7544 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៧ គណនា $\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(9x-15)\,dx$ និង $\int_{0}^{+\infty}t^2\operatorname{sech}\left(-2t^3+17\right)dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=9x-15$ នាំឱ្យ $du=9dx$ និង $dx=\frac{du}{9}$ ។ ពេល $x\to+\infty$ នោះ $u\to+\infty$ និងពេល $x\to-\infty$ នោះ $u\to-\infty$ ។ នាំឱ្យ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(9x-15)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}u\,\frac{du}{9}=\frac{1}{9}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}u\,du$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0}\operatorname{sech}u\,du+\frac{1}{9}\lim_{M\to+\infty}\int_{0}^{M}\operatorname{sech}u\,du$$

$$=\frac{2}{9}\lim_{N\to-\infty}\arctan e^u\Big|_N^0+\frac{2}{9}\lim_{M\to+\infty}\arctan e^u\Big|_0^M \quad \text{(រូបមន្ត (8.7))}$$

$$=\frac{2}{9}\lim_{N\to-\infty}\left(\arctan e^0-\arctan e^N\right)+\frac{2}{9}\lim_{M\to+\infty}\left(\arctan e^M-\arctan e^0\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan 0\right)+\frac{2}{9}\left(\arctan(+\infty)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{9} \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_{0}^{+\infty}t^2\operatorname{sech}\left(-2t^3+17\right)dt$ យើងតាង $u=-2t^3+17$ នាំឱ្យ $du=-6t^2dt$ និង $t^2dt=-\frac{du}{6}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=-2t^3+17=17$ និងពេល $t\to+\infty$ នោះ $u\to-\infty$ ។

នាំឱ្យ $\int_{0}^{+\infty}t^2\operatorname{sech}\left(-2t^3+17\right)dt=\int_{17}^{+\infty}\operatorname{sech}u\left(-\frac{du}{6}\right)$

$$=-\frac{1}{6}\int_{17}^{+\infty}\operatorname{sech}u\,du=-\frac{1}{6}\lim_{M\to+\infty}\int_{17}^{M}\operatorname{sech}u\,du$$

$$=-\frac{1}{6}\lim_{M\to+\infty}\arctan e^u\Big|_{17}^{M} \quad \text{(តាមរូបមន្ត (8.7))}$$

$$= -\frac{1}{6}\lim_{M\to+\infty}\left(\arctan e^{M} - \arctan 17\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{17}\right) \approx 0 \text{ ។}$$

៨.៩ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int \cos ech(a\,x)\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int \cos ech(a\,x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\cos ech(a\,x)$ ជាអនុគមន៍កូសេកង់អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int \cos ech(a\,x)\,dx$ ដែល $a \neq 0$ ។

យើងមាន $\cos ech(a\,x) = \dfrac{1}{\sinh(a\,x)} = \dfrac{2}{e^{a\,x} - e^{-a\,x}} = \dfrac{2e^{a\,x}}{\left(e^{a\,x}\right)^2 - 1}$ ។

យើងតាង $t = e^{a\,x}$ នាំឱ្យ $dt = a\,e^{a\,x}\,dx$ និង $e^{a\,x}\,dx = \dfrac{dt}{a}$ ។

នាំឱ្យ $\int \cos ech(a\,x)\,dx = \int \dfrac{dx}{\sinh(a\,x)} = \int \dfrac{2e^{a\,x}\,dx}{\left(e^{a\,x}\right)^2 - 1}$

$$= \int \frac{2}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{a} = \frac{2}{a}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{e^{a\,x}-1}{e^{a\,x}+1}\right| + c \quad (*) \text{ ។}$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន

$$\tanh\frac{a\,x}{2} = \frac{e^{a\,x/2} - e^{-a\,x/2}}{e^{a\,x/2} + e^{-a\,x/2}} = \frac{e^{a\,x} - 1}{e^{a\,x} + 1}$$

$$\frac{\cosh(a\,x) - 1}{\sinh(a\,x)} = \frac{\dfrac{e^{a\,x} + e^{-a\,x}}{2} - 1}{\dfrac{e^{a\,x} - e^{-a\,x}}{2}} = \frac{e^{a\,x} + e^{-a\,x} - 2}{e^{a\,x} - e^{-a\,x}}$$

ហើយ $$\sqrt{\frac{\cosh(ax)-1}{\cosh(ax)+1}}=\sqrt{\frac{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}-1}{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}+1}}=\sqrt{\frac{e^{ax}+e^{-ax}-2}{e^{ax}+e^{-ax}+2}}$$

$$=\sqrt{\frac{e^{2ax}+1-2e^{ax}}{e^{2ax}+1+2e^{ax}}}=\sqrt{\frac{\left(e^{ax}-1\right)^2}{\left(e^{ax}+1\right)^2}}=\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$$ ។

ដូចនេះ តាមសមីការ $(*)$ និងចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\begin{aligned}\int \cos ech(ax)\,dx &=\int\frac{dx}{\sinh(ax)}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}\right|+c=\frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|+c\\ &=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\cosh(ax)-1}{\sinh(ax)}\right|+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\cosh(ax)-1}{\cosh(ax)+1}\right|+c\end{aligned}} \quad (8.8)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១៨ គណនា $\int \cos ech(7x)\,dx$ និង $\int_1^2\frac{dx}{\sinh\left(\frac{5x}{2}\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.8) យើងបាន៖

$$\int \cos ech(7x)\,dx=\frac{1}{7}\ln\left|\tanh\frac{7x}{2}\right|+c$$

និង $$\int_1^2\frac{dx}{\sinh\left(\frac{5x}{2}\right)}=\frac{1}{(5/2)}\ln\left|\frac{e^{5x/2}-1}{e^{5x/2}+1}\right|\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{e^5-1}{e^5+1}\right|-\frac{2}{5}\ln\left|\frac{e^{5/2}-1}{e^{5/2}+1}\right|$$

$$=\frac{2}{5}\ln\frac{\left(e^5-1\right)\left(e^{5/2}+1\right)}{\left(e^5+1\right)\left(e^{5/2}-1\right)}\approx 0.0604$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ គណនា $\int_0^{+\infty}\cos ech(8x+5)\,dx$ និង $\int_0^{+\infty}t^3\cos ech\left(-2t^4-3\right)dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=8x+5$ នាំឱ្យ $du=8dx$ និង $dx=\dfrac{du}{8}$ ។ ពេល $x\to+\infty$ នោះ $u\to+\infty$ និង ពេល $x=0$ នោះ $u=5$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos ech(8x+5)\,dx=\int_5^{+\infty}\cos ech u\,\frac{du}{8}=\frac{1}{8}\int_5^{+\infty}\cos ech u\,du$

$$=\frac{1}{8}\lim_{N\to+\infty}\int_5^{N}\cos ech\,u\,du$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{N\to+\infty}\ln\left|\frac{e^u-1}{e^u+1}\right|\Bigg|_5^N \text{ (តាមរូបមន្ត (8.8))}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{N\to+\infty}\ln\left|\frac{e^N-1}{e^N+1}\right|-\ln\left|\frac{e^5-1}{e^5+1}\right|$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{N\to+\infty}\ln\left|\frac{1-1/e^N}{1+1/e^N}\right|-\ln\left|\frac{e^5-1}{e^5+1}\right|$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\frac{e^5-1}{e^5+1}\approx 0.0016 \text{ ។}$$

ចំពោះ $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^3\cos ech\left(-2t^4-3\right)dt$ យើងតាង $u=-2t^4-3$ នាំឱ្យ $du=-8t^3\,dt$ និង $t^3\,dt=-\dfrac{du}{8}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=-2t^4-3=-3$ និងពេល $t\to+\infty$ នោះ $u\to-\infty$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^3\cos ech\left(-2t^4-3\right)dt=\int_{-3}^{-\infty}\cos ech u\left(-\frac{du}{8}\right)$

$$=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{-3}\cos ech u\,du=\frac{1}{8}\lim_{M\to-\infty}\int_M^{-3}\cos ech u\,du$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{M\to-\infty}\ln\left|\frac{e^u-1}{e^u+1}\right|\Bigg|_M^{-3} \text{ (តាមរូបមន្ត (8.8))}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{M\to-\infty}\left[\ln\left|\frac{e^{-3}-1}{e^{-3}+1}\right|-\ln\left|\frac{e^M-1}{e^M+1}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^{-3}-1}{e^{-3}+1}\right|=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1-e^{-3}}{1+e^{-3}}\right)\approx -0.0124$$ ។

៨.១០ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\cosh^2(ax)}$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ តាមករណីពីរគឺ $a=0$ និង $a\neq 0$ ។

យើងមាន $\cosh^2(ax)=\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2ax}+2e^{ax}e^{-ax}+e^{-2ax}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2ax}+2+e^{-2ax}\right)$$

និង $\frac{1}{\cosh^2(ax)}=\frac{4}{e^{2ax}+2+e^{-2ax}}$ ។

- ករណី $a=0$ នាំឱ្យ

$$\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}=\int\frac{4}{e^{2ax}+2+e^{-2ax}}\,dx=\int dx=x+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណី $a\neq 0$ យើងតាង $t=e^{2ax}$ នាំឱ្យ $2ax=\ln t$, $x=\frac{\ln t}{2a}$ និង $dx=\frac{dt}{2at}$ ។

នាំឱ្យ $\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}=\int\frac{4}{e^{2ax}+2+e^{-2ax}}\,dx=\int\frac{4}{t+2+t^{-1}}\cdot\frac{dt}{2at}$

$$=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{t^2+2t+1}=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$=\frac{2}{a}\int(t+1)^{-2}\,dt=\frac{2}{a}\cdot\frac{(t+1)^{-1}}{(-1)}+c$$

$$=-\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{t+1}+c=\frac{1}{a}\left(-\frac{2}{e^{2ax}+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{a}\left[\tanh(ax)-1\right]+c=\frac{1}{a}\tanh(ax)+c_1$$

ពីព្រោះ $\tanh(ax)=\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\dfrac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$

$$=\frac{\left(e^{2ax}+1\right)-2}{e^{2ax}+1}=1-\frac{2}{e^{2ax}+1}$$

នាំឱ្យ $-\dfrac{2}{e^{2ax}+1}=\tanh(ax)-1$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}=-\frac{2}{a\left(e^{2ax}+1\right)}+c=\frac{1}{a}\tanh(ax)+c_1} \quad (8.9)$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២០ គណនា $\displaystyle\int\frac{dx}{\cosh^2(3x)}$ និង $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\cosh^2(5x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.9) យើងបាន៖

$$\int\frac{dx}{\cosh^2(3x)}=\frac{1}{3}\tanh(3x)+c_1$$

និង $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\cosh^2(5x)}=-\frac{2}{5\left(e^{10x}+1\right)}\Bigg|_0^1=-\frac{2}{5\left(e^{10}+1\right)}+\frac{1}{5}\approx 0.1999$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២១ គណនា $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\cosh^2(12x-123)}$ និង $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(t-1)\,dt}{\cosh^2\left(12t^2-24t\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=12x-123$ នាំឱ្យ $du=12dx$ និង $dx=\dfrac{du}{12}$ ។ ពេល $x\to+\infty$ នោះ $u\to+\infty$ និងពេល $x\to-\infty$ នោះ $u\to-\infty$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\cosh^2(12x-123)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\cosh^2 u}\cdot\frac{du}{12}=\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\cosh^2 u}$

$$=\frac{1}{12}\lim_{N\to-\infty}\int_N^0\frac{du}{\cosh^2 u}+\frac{1}{12}\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{du}{\cosh^2 u}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{N\to-\infty}\left.\frac{-2}{e^{2x}+1}\right|_N^0+\frac{1}{12}\lim_{M\to+\infty}\left.\frac{-2}{e^{2x}+1}\right|_0^M \quad (\text{រូបមន្ត } (8.9)\ )$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{N\to-\infty}\left(\frac{-2}{e^0+1}+\frac{2}{e^{2N}+1}\right)+\frac{1}{12}\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^{2M}+1}+\frac{2}{e^0+1}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(-1+2)+\frac{1}{12}(0+1)=\frac{1}{6}\approx 0.1666 \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_0^{+\infty}\frac{(t-1)\,dt}{\cosh^2(12t^2-24t)}$ យើងតាង $u=12t^2-24t$ នាំឱ្យ $du=(24t-24)dt$ $=24(t-1)dt$ និង $(t-1)dt=\frac{du}{24}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=12t^2-24t=0$ និងពេល $t\to+\infty$ នោះ $u\to+\infty$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^{+\infty}\frac{(t-1)\,dt}{\cosh^2(12t^2-24t)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\cosh^2 u}\cdot\frac{du}{24}=\frac{1}{24}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\cosh^2 u}$

$$=\frac{1}{24}\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{du}{\cosh^2 u}$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{M\to+\infty}\left.\frac{-2}{e^{2x}+1}\right|_0^M \quad (\text{តាមរូបមន្ត } (8.9)\ )$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{M\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^{2M}+1}-\frac{(-2)}{e^0+1}\right)$$

$$=\frac{1}{24}(0+1)=\frac{1}{24}\approx 0.0416 \text{ ។}$$

៨.១១ ប្រភេទអាំងតេក្រាលមានរាង $\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{\sinh^2(ax)}$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកកំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $a\neq 0$ ។

យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដែល $a\neq 0$ ។

យើងមាន $\sinh^2(ax)=\left(\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(e^{2ax}-2e^{ax}e^{-ax}+e^{-2ax}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2ax}-2+e^{-2ax}\right)$$

និង $\dfrac{1}{\sinh^2(ax)}=\dfrac{4}{e^{2ax}-2+e^{-2ax}}$ ។

យើងតាង $t=e^{2ax}$ នាំឱ្យ $2ax=\ln t$, $x=\dfrac{\ln t}{2a}$ និង $dx=\dfrac{dt}{2at}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}=\int\frac{4}{e^{2ax}-2+e^{-2ax}}\,dx=\int\frac{4}{t-2+t^{-1}}\cdot\frac{dt}{2at}$

$$=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{t^2-2t+1}=\frac{2}{a}\int\frac{dt}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{2}{a}\int(t-1)^{-2}\,dt=\frac{2}{a}\cdot\frac{(t-1)^{-1}}{(-1)}+c$$

$$=-\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{t-1}+c=-\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{e^{2ax}-1}+c$$

$$=-\frac{1}{a}\left[\coth(ax)-1\right]+c=-\frac{1}{a}\coth(ax)+c_1$$

ពីព្រោះ $\coth(ax)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}=\dfrac{e^{2ax}+1}{e^{2ax}-1}$

$$=\frac{\left(e^{2ax}-1\right)+2}{e^{2ax}-1}=1+\frac{2}{e^{2ax}-1}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{2}{e^{2ax}-1}=\coth(ax)-1$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}=-\frac{2}{a\left(e^{2ax}-1\right)}+c=-\frac{1}{a}\coth(ax)+c_1}\quad(8.10)$$

ដែល c , c_1 ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី២២ គណនា $\int \frac{dx}{\sinh^2(2x)}$ និង $\int_{0.5}^{1} \frac{dx}{\sinh^2(1.5x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (8.10) យើងបាន៖

$$\int \frac{dx}{\sinh^2(2x)} = -\frac{1}{2}\coth(2x) + c_1$$

និង $$\int_{0.5}^{1} \frac{dx}{\sinh^2(1.5x)} = -\frac{2}{1.5\left(e^{3x}-1\right)}\Bigg|_{0.5}^{1}$$

$$= -\frac{2}{1.5\left(e^{3}-1\right)} + \frac{2}{1.5\left(e^{1.5}-1\right)} \approx 0.3130 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គណនា $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2(-8x-12)}$ និង $\int_{0}^{+\infty} \frac{\left(3e^t-5\right)dt}{\sinh^2\left(6e^t-10t+7\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=-8x-12$ នាំឱ្យ $du=-8dx$ និង $dx=-\frac{du}{8}$ ។ ពេល $x\to+\infty$ នោះ $u\to-\infty$ និងពេល $x\to 0$ នោះ $u\to-12$ ។

នាំឱ្យ $$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sinh^2(-8x-12)} = \int_{-12}^{-\infty} \frac{1}{\sinh^2 u}\cdot\left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{1}{8}\int_{-12}^{-\infty}\frac{du}{\sinh^2 u}$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{-12}\frac{du}{\sinh^2 u} = \frac{1}{8}\lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{-12}\frac{du}{\sinh^2 u}$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{N\to-\infty}\frac{-2}{e^{2x}-1}\Bigg|_{N}^{-12} \quad \text{(តាមរូបមន្ត (8.10))}$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{N\to-\infty}\left(\frac{-2}{e^{-24}-1} + \frac{2}{e^{2N}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{-2}{e^{-24}-1} - 2\right) \text{ ។}$$

ចំពោះ $\int_{0}^{+\infty} \frac{\left(3e^t-5\right)dt}{\sinh^2\left(6e^t-10t+7\right)}$ យើងតាង $u=6e^t-10t+7$ នាំឱ្យ $du=\left(6e^t-10\right)dt$

$=2\left(3e^t-5\right)dt$ និង $\left(3e^t-5\right)dt=\frac{du}{2}$ ។ ពេល $t=0$ នោះ $u=13$ និងពេល $t\to+\infty$ នោះ $u\to+\infty$ ។

នាំឱ្យ $\int_0^{+\infty}\frac{\left(3e^t-5\right)dt}{\sinh^2\left(6e^t-10t+7\right)}=\int_{13}^{+\infty}\frac{1}{\sinh^2 u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_{13}^{+\infty}\frac{du}{\sinh^2 u}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\int_{13}^{M}\frac{du}{\sinh^2 u}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{-2}{e^{2x}-1}\right|_{13}^{N}$$ (តាមរូបមន្ត (8.10))

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^{2N}-1}+\frac{2}{e^{26}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(0+\frac{2}{e^{26}-1}\right)=\frac{1}{e^{26}-1}$$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី៨នេះបានផ្តល់នូវនិយមន័យនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក ហើយនិងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int\sinh(ax)\,dx$, $\int\cosh(ax)\,dx$, $\int\sinh^2(ax)\,dx$, $\int\cosh^2(ax)\,dx$, $\int\tanh(ax)\,dx$, $\int\coth(ax)\,dx$, $\int\sec h(ax)\,dx$, $\int\cos ech(ax)\,dx$, $\int\frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ និង $\int\frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ការសន្និដ្ឋាន

ជារួមមកវិញ យើងឃើញថា ជំពូកទី១បានបង្ហាញនូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាល ទ្រឹស្តីបទ រូបមន្តគ្រឹះ ហើយលក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងអាំងតេក្រាលកំណត់។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ វិធីប្តូរអថេរ និង វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំណែកឯជំពូកទី២បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រនៃការបំបែកអនុគមន៍សនិទានក្នុង $\mathbb{R}$ និងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$, $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(a_1x+b_1)\,dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ និង $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^m}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៣បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានមួយចំនួនដូចជា $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\,dx$, $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$, $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{k-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k}}\,dx$, $\int \sqrt{k-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2+k}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-k}\,dx$, $\int (\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}\,dx$, $\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax+b}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ និង $\int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៤បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int e^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int \frac{dx}{p+qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^2}$, $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+qa^{\alpha x}}$, $\int \frac{dx}{pa^{\alpha x}+qa^{-\alpha x}}$,

$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, $\int_{\mu}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-2bx}dx$ និង $\int_{-b/2a}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំណែកឯជំពូកទី៥បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីត និងអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតមួយចំនួនដូចជា $\int \log_a(px+q)dx$, $\int \log_a|px+q|dx$, $\int \log_a^2(px+q)dx$, $\int \log_a^2|px+q|dx$, $\int \log_a(x^2+b^2)dx$ និង $\int \log_a(x^2-b^2)dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៦បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int xe^{\alpha x}dx$, $\int xa^{\alpha x}dx$, $\int x^2e^{\alpha x}dx$, $\int x^2a^{\alpha x}dx$, $\int x^ne^{\alpha x}dx$, $\int x^{-1}e^{\alpha x}dx$, $\int xe^{\alpha x^2}dx$, $\int xa^{\alpha x^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\alpha x^2}dx$, $\int_0^{+\infty} xe^{\alpha x^2}dx$, $\int x^{-2}e^{-\alpha x^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a(x-b)^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2-bx}dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{-ax^2+bx}dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៧វិញបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍លោការីតនិងអនុគមន៍ស្វ័យគុណដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int x^m \ln x\,dx$,

$\int \frac{\left(\ln(ax)\right)^n}{x}dx$, $\int \frac{\ln(ax)^n}{x}dx$, $\int \frac{\ln(ax)}{x^m}dx$, $\int \frac{dx}{x\left[\ln(ax)\right]^n}$, $\int \frac{dx}{x^m \ln x}$, $\int x^m (\ln x)^n dx$ និង $\int \frac{x^m}{(\ln x)^n}dx$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ចំពោះជំពូកទី៨បានផ្តល់នូវនិយមន័យនិងលក្ខណៈនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកហើយនិងវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកដែលមានទម្រង់ពិសេសមួយចំនួនដូចជា $\int \sinh(ax)\,dx$, $\int \cosh(ax)\,dx$, $\int \sinh^2(ax)\,dx$, $\int \cosh^2(ax)\,dx$, $\int \tanh(ax)\,dx$, $\int \coth(ax)\,dx$, $\int \operatorname{sec}h(ax)\,dx$, $\int \operatorname{cos}ech(ax)\,dx$, $\int \frac{dx}{\cosh^2(ax)}$ និង $\int \frac{dx}{\sinh^2(ax)}$ ដោយបង្កើតជារូបមន្តដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅនិងបានអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។

ជាទីបញ្ចប់នេះ យើងខ្ញុំយល់ឃើញថាការសិក្សាស្រាវជ្រាវទៅលើប្រធានបទអំពី << **សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ** >> បានផ្តល់នូវផលប្រយោជន៍ជាច្រើនទាំងខាងទ្រឹស្តីនិងការអនុវត្តគណនាវា។ ជាងនេះទៅទៀត យើងខ្ញុំបានទទួលនូវគំនិតថ្មីនិងចំណេះដឹងថ្មីដែលកើតចេញអំពីប្រធានបទនៃអត្ថបទស្រាវជ្រាវនេះ និងយើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅស្រាវជ្រាវនេះជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងការគណនាអាំងតេក្រាលទាំងកម្រិតមធ្យមសិក្សានិងឧត្តមសិក្សា។

ឯកសារយោង

១. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* ” ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៧។

២. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា “ *អាំងតេក្រាលកំណត់* ” ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៩។

៣. សួន សូវ៉ាន់ “ *វិភាគចំនួនពិត ភាគ១* ” ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧។

៤. ក្រុមអ្នកនិពន្ធ “ *គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២* ” បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១០។

៥. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_hyperbolic_functions

៦. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/

៧. Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, New York, Macmillan Company, Third Edition, 1957.

៨. Karl Smith, *Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus*, United States of America, Prentice-Hall, Inc., Third Edition, 2002.